O‘ZBEKISTON RESPUBLKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

“Matematika” kafedrasi

“Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fani

Amaliy mashg‘ulot

Tuzuvchilar: dots. Adirov T., dots. Mamurov E.

Kafedraning 2008 yil 26 avgustdagi
majlisida muhokama qilingan va
tavsiya etilgan (1-sonli bayonnoma)
Kafedra mudiri prof. Q. Safayeva

Toshkent-2008

11. Katta sonlar qonuni

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatini oldindan aytish mumkin emas, ya'ni u tasodifan qiymat qabul qiladi. Lekin soni katta bo'lgan tasodifiy miqdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xususiyatini yo'qotar ekan. Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi.

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, ... X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin va bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari mavjud bo'lib, ular mos ravishda $a_1, a_2, ... a_n$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, ... X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli deyiladi.

Bu ta'rifning ma'nosi quyidagicha: *n* ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

tasodifiy miqdorni tasodifiy bo'lmagan

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

son bilan almashtirgan bo'lamiz.

Katta sonlar qonuni qachon o'rinli bo'ladi? degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

Chebishev teoremasi $X_1, X_2, ... X_n$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmay, ularning har biri C soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo'lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi.

Bernulli teoremasi. *n* ta erkli tajribada A hodisaning ro‘y berishlari soni μ bo‘lsin, har bir tajribada A hodisa o‘zgarmas P ehtimol bilan ro‘y bersin. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremaning ma’nosi quyidagicha: n yetarlicha katta bo‘lganda $\frac{\mu}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan P ga teng deb olish mumkin. Ya’ni $\frac{\mu}{n}$ning qiymatlari P ehtimol atrofida joylashgan bo‘ladi. Bundan tashqari, bu teorema sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik xossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

Yuqoridagi teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligi muhim ahamiyatga ega:

Chebishev tengsizligi. Birinchi forma: agar X tasodifiy miqdor musbat bo‘lib, M(X) matematik kutilishiga ega bo‘lsa,

$$P\{X>\alpha\} < \frac{M(X)}{\alpha}$$

Ikkinchi forma: agar D(X)$< +\infty$bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$son uchun

$$P\left(\left|X - M(X)\right| > \varepsilon\right) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

271-misol. $X_1, X_2, ... X_n$tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, X_n tasodifiy miqdor *–n,o,n* qiymatlarini mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1-\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n>1)$ ehtimollar bilan qabul qiladi. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladimi?

Yechish: Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n\cdot\frac{1}{n^2} + 0\cdot(1-\frac{2}{n^2}) + n\cdot\frac{1}{n^2} = 0$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2\cdot\frac{1}{n^2} + 0^2\cdot(1-\frac{2}{n^2}) + n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 2$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. U holda, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tatbiq qilsa bo‘ladi.

272-misol. A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Agar 100 ta erkli sinov o‘tkaziladigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Yechish: X-tasodifiy miqdor qaralayotgan A hodisaning 100 ta erkli sinovda ro‘y berishi sonining matematik kutilishini va dispersiyasini topamiz:

$$M(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan M(X)=50 matematik kutilish orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Bunga M(X)=50, D(X)=25, $\varepsilon = 10$ ni qo‘yib quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x - 50| < 10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0.75$$

273. Agar D(X)=0,001 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,1 ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo‘yicha baholang.

274. Quyidagilar berilgan: P(|X-M(X)|<ε)$\geq$0,9,D(X)=0,004. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

275. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 16 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 80 km/s dan oshmasligini baholang.

276. Toshkent shahrining bitta rayonida elektroenergiyaning o‘rtacha sarfi may oyida 360000 kvt/s. May oyida elektroenergiya sarfining 1000000 kvt/s dan oshmasligini baholang.

277. Aholi punktida 1 kunda suvning o‘rtacha sarfi 50000 litr. Bir kunda suv sarfining 150000 litrdan oshmasligini baholang.

278. X tasodifiy miqdor uchun M(X)=1 va $\sigma(X) = 0.2$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 0,5<X<1.5 tengsizlikni baholang.

279. X tasodifiy miqdorning o‘z matematik kutilish chetlanishi uchlangan o‘rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo‘lish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang (“uch sigma” qoidasi).

280. Agar D(X)=0,004 bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib $|X-M(X)|<0{,}2$ ning ehtimolini baholang.

281. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X:	0,3	0,6
P:	0,2	0,8

| $|X-M(X)|<0{,}2$ ni baholang.

282. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \dots X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X_n :	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P :	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

283. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \dots X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X_n :	a	-a
P :	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

284. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \dots X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X_n :	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P :	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

285. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \dots X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X_n :	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
P_n :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

286. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X:	3	5
P:	0,6	0,4

$||X-M(X)|<0,3$ ni baholang.

287. Agar D(X)=0,002 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,2 ning ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

288. Quyidagilar berilgan: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 0,9$, D(X)=0,006. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

289. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 20 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 100 km/s dan oshmasligini baholang.

290. Ma’lum bir joyda bir yilda o‘rtacha 75 kun quyoshli bo‘ladi. Bu joyda bir yilda quyoshli kunlarning 200 kundan ko‘p bo‘lmaslik ehtimolini baholang.