ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАъЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ МОЛИЯ ИНСТИТУТИ
Р. Муминова С. Турдахунова

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

II ҚИСМ

Институтнинг барча бакалавриат таълим ё`ҳалишлари учун

Тошкент 2005

Олий математика. Масалалар тўплами, Р. Муминова, С.Турдахунова. “ИҚТИСОД-МОЛИЯ” нашриёти, 2005 й. 101 бет.

Аннотация. Ушбу масалалар тўплами институтнинг барча бакалавриат таълим ё`ҳалишлари учун мўлжалланган бўлиб, унга “Олий математика” фанидан аниқловчилар, матрицалар, чизиқли тенгламалар системаси ва уларни ечиш усуллари, текисликда ва фазодаги аналитик геометрия елементлари ҳақида қисқача тушунча киритилган. Ҳар бир мавзуга оид масалалар намунавий йечимлари, мустақил ишлаш учун масалалар киритилган.

Масалалар тўплами “Математика” кафедраси мажлисида муҳокама қилинган ва нашрга тавсия етилган.

24 май 2005 й. 16 сонли мажлис баёни.

“Математика” кафедраси мудири: Қ. Сафайева

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг Тошкент молия институти қошидаги олий ўқув юртлараро илмий-услубий кенгашда муҳокама қилинган.

4 июн 2005 й. № 5 Кенгаш қарори

Ректорнинг ўқув-услубий ишлари бўйича муовини проф. А. Воҳобов

Тақризчилар: доц. С. Исамухамедов
доц. М. Каримов

“ИҚТИСОД-МОЛИЯ” нашриёти, 2005

1. ИККИНЧИ, УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ АНИҚЛОВЧИЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ҳақиқий сонлар берилган бўлсин иккинчи тартибли детерминант (ёки аниқловчи) деб, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ каби белгиланувчи ва $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади

1. а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-4) \cdot 2 = 15+8 = 23$

б) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - (-1) \cdot a = a+a = 2a$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Қуйидаги иккинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

2. $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} \sqrt{a}+\sqrt{b} & \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} & \sqrt{a}+\sqrt{b} \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \sin 1^0 & \sin 89^0 \\ -\cos 1^0 & \cos 89^0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} (x+y)/x & 2x/(x-y) \\ (y-x)/(x^2-y^2) & (y-x)/(x^2-y^2) \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \cos^2 b \end{vmatrix}$

8. Тенгламани йечинг:

а) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0,(4) & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

б) $(0,6) \cdot (25/9) \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = (27/125)^3$

9. Тенгсизликларни йечинг:

а) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -4 & x \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$,

б) $1/\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} < 1/3$

Берилган a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} ҳақиқий сонлардан тузилган $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ йиғиндига тенг ва

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ каби берилган сонга учинчи тартибли детерминант деб

аталади. Учинчи тартибли детерминантларни учбурчаклар усулида, Саррюс усулида ҳамда бирор сатр ёки устун елементлари бўйича ёйиб ҳисоблаш мумкин.

1. Учбурчаклар усули:

(+) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (-) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

2. Саррюс усули:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3. Биринчи устун елементлари бўйича ёйиб ҳисоблаш:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

10. Учинчи тартибли детерминантларни учрурчаклар усули, Саррюс усули ҳамда бирор ихтиёрий сатр ёки устун елементлари бўйича ёйиб ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot(-5) + 1\cdot1\cdot4 + 2\cdot(-1)\cdot1 - 1\cdot(-3)\cdot4 - 1\cdot2\cdot(-5) - 1\cdot(-1)\cdot1 =$

$= 15 + 4 - 2 + 12 + 10 + 1 = 40$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 2 + 4 + 12 + 1 + 10 = 40$

с) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$ - $1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 14 + 10 = 40$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Қуйидаги учинчи тартибли детерминантларни қулай усулда ҳисобланг:

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$

Детерминантларни 3-устун елементлари бўйича ёйиб ҳисобланг:

20. $\begin{vmatrix} 1+\cos a & 1+\sin a & 1 \\ 1-\sin a & 1+\cos a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 2\cos^2 a/2 & \sin a & 1 \\ 2\cos^2 b/2 & \sin b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 1 \\ \sin b & \cos b & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \end{vmatrix}$

Қандай шарт бажарилганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади?

23. $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos y \\ \cos b & \cos y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos y \\ \cos b & \cos y & 0 \end{vmatrix}$

Детерминантларни ҳисобланг:

24. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a\cos b & \sin a\sin b \\ -\sin a & \cos a\cos b & \cos a\sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1,(3) & 2,25 \\ 23/3 & 6 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} \sin 60^0 & \cos 45^0 \\ \sin 45^0 & tg30^0 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} tga & -1 \\ 4 & ctga \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} (a-1)/2\sqrt{a} & (a+\sqrt{a})/(\sqrt{a}-1) \\ (a\sqrt{a}-\sqrt{a})/2a & (a-\sqrt{a})/(\sqrt{a}+1) \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} \sin 3a & \cos 3a & 1 \\ \sin 2a & \cos 2a & 1 \\ \sin a & \cos a & 1 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} \sin x & 0 & -3/2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 1$

42. $\begin{vmatrix} 3^x & 2 & -1 \\ 9^x & 2^x & 0 \\ 2^x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$

Жавоблар:

2. -2
3. -35
4. $4\sqrt{ab}$
5. 1
6. *(x^2+$й^2$)/x(x^2-$й^2$)*
7. *син(а+б)син(а-б)*
8. а) $x_1=1/2,\ x_2=1$

   б) $x_1=-5/2,\quad x_2=3$
9. а) *x є [2;3]*

   б) *(-∞ ,2) У (5 , ∞)*
10. 40
11. -10
12. *4a*
13. 68
14. 15
15. 29
16. 0
17. -20
18. $-4a^3$
19. -156
20. 1
21. *син(б-а)*
22. *син(б-й)+син(й-а)+син(а-б)*
23. *$сос^2а$+$сос^2б$+$сос^2й$=1*
24. *(аб+бс+са)x+абс*
25. 1
26. -37/4
27. 0
28. 5
29. $-2\sqrt{a}$,   *a>0,   a≠1*
30. 10
31. 72
32. *(x-й)(й-з)(x-з)*
33. *амн*
34. *а (x-з) (й-з)(й-x)*
35. *4синасин^{2}а/2*
36. *3абс-$а^3$-$б^3$-$с^3$*
37. *$2x^3$-(а+б+с)x^2+абс*
38. 6
39. 20
40. -8
41. *x=π/12+πк/2*
42. *x*<0

2. ДЕТЕРМИНАНТ ХОССАЛАРИ .МИНОР ВА АЛГЕБРАИК ТЎЛДИРУВЧИЛАРГА ДОИР МИСОЛЛАР

Детерминантнинг асосий хоссалари ёрдамида юқори тартибли детерминантлар қуйи тартибли детерминантга келтирилади.

Мисол:

а) $\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

бу детерминантни бирор сатр ёки устунда ноллар ҳосил қилиб ҳисоблаймиз. Бунинг учун 1-сатрни (-1) га кўпайтириб 2-сатрга қўшамиз:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2 – устун елементлари бўйича ёйиб ёзамиз:

$$\det = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1$$

б) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ Детерминантни ҳисобланг.

Детерминантни ҳисоблаш учун бирор йўл ёки устунда ноллар ҳосил қиламиз. Бунинг учун 2-сатр елементларини (-3) га кўпайтириб 1-сатр елементларига, 2-сатрни 2 га кўпайтириб 3-сатр елементларига қўшамиз, 4-сатр елементларидан 2-сатр елементларини айирамиз. Натижада берилган детерминант қуйидаги кўринишга келади:

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Детерминантни 1-устун елементлари бўйича ёйиб ёзамиз:

$$\det = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

1- сатр елементларига 2- сатр елементларини ҳадма–ҳад қўшиб, 1 – сатр елементлари бўйича ёйиб ёзамиз:

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -70$$

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

н- тартибли детерминантнинг $a_{иж}$ елементининг алгебраик тўлдирувчиси

$A_{иж} = (-1)^{и+ж} M_{иж}$ формула бўйича ҳисобланади, бу йерда $M_{иж}$ $a_{иж}$ елементнинг минори.

Берилган $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ детерминантнинг барча алгебраик тўлдирувчиларини топинг.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -30;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -20;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 15;$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 70;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 25;$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -22;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 15;$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$

Детерминантнинг ихтиёрий сатр ёки устун елементларининг ўз алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмаларининг йиғиндиси унинг катталигига тенг деган хоссага кўра, ҳар қандай детерминантни ихтиёрий сатр (устун) бўйича ёйиб ёзиш мумкин.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. а) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 9 \end{vmatrix}$, дет, A_{32} ни топинг.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ да A_{41} ни топинг.

Детерминантлар хоссаларидан фойдаланиб, ноллар йиғиб ҳисобланг:

2. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \sin^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos 2a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \cos 2b & \cos^2 b \\ \sin^2 y & \cos 2y & \cos^2 y \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x & x & ax+bx \\ y & y & ay+by \\ z & z & az+bz \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

Детерминантларни қулай усулда ҳисобланг:

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -9 & -9 & -9 & -9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

15. $A+Б$ ни ҳисобланг: $A=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $Б=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ 17. $A=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $Б=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$ $A\cdot Б=?$

18. $A=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $Б=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ $A\cdot Б=?$

19. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

21. $-0{,}125\begin{vmatrix} -1/13 & 2/13 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 26 & 26 & 26 \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 6 & -6 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$

Жавоблар:

1. а)1 б)-36
2. -11
3. *-В(б+1)*
4. *-2x*
5. 68
6. 0
7. 0
8. 0
9. 0
10. -12
11. 40
12. 0
13. 54
14. 465
15. -10
16. 10
17. 17
18. 65
19. 14
20. -12
21. -1
22. -20
23. 2
24. 160
25. 0
26. *2(ад-бс)*
27. -252
28. -4
29. 900
30. 12
31. 39520
32. $а^2б^2$

3. МАТРИЦАЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Матрицалар устида қуйидаги чизиқли амалларни бажариш мумкин.

1. Матрицани сонга кўпайтириш учун унинг барча елементлари шу сонга кўпайтирилади. $к\neq 0$ сон ҳамда

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ матрица берилган бўлса, $Aк=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$ тенглик ўринли бўлади.

3. Ўлчамлари бир ҳил бўлган A ва $Б$ матрицаларни қўшиш учун мос елементлари қўшилади:

$Б=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ бўлса, $A+Б=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$ матрица ҳосил бўлади.

4. Матрицаларни кўпайтириш.

Агар A матрицанинг устунлари сони $Б$ матрицанинг йўллар сонига тенг бўлса A ни $Б$ га кўпайтириш мумкин, нхм ўлчовли $A=(a_{ик})$ матрицани мхп ўлчовли $Б=(б_{ик})$ матрицага қуйидаги формула бўйича кўпайтирилади.

$$c_{ик}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ik}$$

Амалларни бажаринг:

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad Б=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A+Б$ матрицани топинг.

$$A+Б=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. $A=\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad Б=\begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$ $\quad A^{\cdot}Б$ матрицани топинг.

$$A^{\cdot}Б=\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7.26+(-12).15 & 7.45+(-12).26 \\ -4.26+7.15 & -4.45+7.26 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Берилган матрицалар устида талаб қилинган амаллани бажаринг.

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ $Б=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $2A\text{-}Б=?$

4. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $Б=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $3A\text{-}2Б=?$

5. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{18} \\ 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

6. $C=(1\ \ 2\ \ 3)$, $Ф=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $C*Ф=?$

7. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Б=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A*Б=?$

8. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $Б=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $A*Б=?$

9. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A^2=?$

10. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, E-бирлик матрица $2A^2+3A+5E=?$

11. $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $Б=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $A*Б\text{-}C^2=?$

12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $Б=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C=(2\ \ 0\ \ 5)$, E- бирлик матрица $A*Б*C\text{-}3E=?$

13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $Б=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A*Б=?$

14. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =?$

15. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =?$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} =?$

17. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $Б=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $2A+5Б=?$

18. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $Б=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A+Б=?$

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A*C=?$

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Ф=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A*Ф=?$

21. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $Б=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2\text{-}A*Б+2БA=?$

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $Б=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $A*Б=?$

23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $Б=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A*Б=?$ $Б*A=?$

24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2+A+E=?$

25. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad Б=\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A*Б*C=?$

26. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & -9 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}=?$$

27. $$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}=?$$

28. $$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=?$$

29. $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}=?$$

30. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}=?$$

Жавоблар:

3. $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -13 \\ 8 & -5 & 13 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

6. $(6 \quad 7)$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 10 & 10 & 33 \\ -11 & -7 & 25 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 73 & 25 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -9 & -16 & -3 \\ 19 & 21 & 17 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 14 \\ -5 & -9 & 9 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. МАТРИЦА РАНГИНИ ҲИСОБЛАШ. ТЕСКАРИ МАТРИЦАНИ ТОПИШ

1. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ (1)

A матрицанинг ранги деб нолдан фарқли минорларнинг енг юқори тартибига айтилади ва *ранг(A)* каби ифодаланади.

Матрица ранги икки усулда топилади:

1. Матрица ранги таърифга асосланган “минорлар ажратиш” усули;
2. Матрица устун ва сатрларида ноллар йиғиб ҳисоблашга асосланган “Гаусс алгоритми”.

Мисол 1. Матрица рангини ҳисобланг:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ *A* матрица 3x4 тартибли, демак унинг ранги 3 дан юқори бўлмайди. Учинчи тартибли минорларни ҳисоблаймиз:

$M_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$=-4-10-12+12+4+10=0 $M_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$=-32-2+8-8+32+2=0

$M_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$=-8-14-16+16+8-14=0 $M_4=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$=-40-3+4-10+48+1=0

$M_5=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$=6-14+160-4+20-168=0

Барча учинчи тартибли минорлар нолга тенг. Иккинчи тартибли минорларни ҳисоблаймиз:

$M_1^1=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$=-5+6=1 $M_1^1 \neq 0$ *p(A)*=2

Мисол 2. Матрица рангини елементар алмаштиришлар ёрдамида ноллар йиғиб ҳисоблаймиз:

$$A=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

бу матрицанинг ранги $\begin{pmatrix}31 & 17 & 43\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ матрица рангига тенг.

$$\begin{vmatrix}31 & 17 & 43\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=40\neq 0 \qquad p\begin{pmatrix}31 & 17 & 43\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=3.$$

Демак, берилган матрицанинг ранги ҳам 3 га тенг. $p(A)=3$

(1) кўринишдаги A матрица учун тескари матрица 2 усулда топилади:

1. Классик усули;
2. Жордан усули.

Мисол 3. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 4\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$ матрица учун тескари A^{-1} матрицани классик усулда топинг.

Классик усулда тескари матрица $A^{-1}=1/|A|\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$ (2)

формула бўйича ҳисобланади. Бу йерда $|A|$ берилган матрица детерминанти. $A_{иж}$($и$=1, 2, 3; $ж$=1, 2, 3) транспонирланган матрицанинг алгебраик тўлдирувчилари.

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 4\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}$=-2+12-20-2+15+16=43-24=19≠0. Демак, A матрица махсусмас матрица. A^{-1} тескари матрица мавжуд. Алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$=-1+8=7 $A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$=-(-3+4)=-1

$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$=12-2=10 $A_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$=-(-5-4)=9

$A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$=-2-2=-4 $A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$=-(8-10)=2

$A_{13}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$=-10-1=-11 $A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$=-(-4-3)=7

$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$=2-15=-13

$A_{иж}$ ларни (2) формулага қўямиз:

$A^{-1}=1/19\begin{pmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & 2 \\ -11 & 7 & -13 \end{pmatrix}$ тескари матрицанинг тўғри топилганини

$$AA^{-1}=E \qquad (3)$$

формула бўйича текширамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} * 1/19 \begin{pmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & 2 \\ -11 & 7 & -13 \end{pmatrix} = 1/19 * \begin{pmatrix} 14+27-22 & -2-12+14 & 20+6-26 \\ 35+9-44 & -5-4+28 & 50+2-52 \\ 7-18+11 & -1+8-7 & 10-4+13 \end{pmatrix} =$$

$$=1/19*\begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Мисол 4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$|A|=16\neq0$ тескари матрица мавжуд. Тескари матрицани Жордан усулида топамиз. Берилган матрицани бирлик матрица ҳисобида кенгайтириб, елементар алмаштиришлар бажарамиз, бу усулни то чап томонда A матрица ўрнида бирлик матрица ҳосил бўлгунча давом еттирамиз, ўнг томонда ҳосил бўлган матрица берилган матрицага нисбатан тескари матрица бўлади.

$\left(A\middle|E\sim E\middle|A^{-1}\right)$- Жордан усули алгаритми.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&1\\-1&-1&-3&0&1&0\\4&3&-2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&1&1&0\\0&-5&-6&-4&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&1&1&0\\0&0&-16&1&5&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&1&1&0\\0&0&1&-1/16&-5/16&-1/16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&-1&-2&0\\0&1&0&14/16&6/16&-2/16\\0&0&1&-1/16&-5/16&-1/16\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11/16&-7/16&5/16\\0&1&0&14/16&6/16&-2/16\\0&0&1&-1/16&-5/16&-1/16\end{array}\right)\qquad A^{-1}=1/16\begin{pmatrix}-11&-7&5\\14&6&-2\\-1&-5&-1\end{pmatrix}$$

тескари матрица тўғри топилганини (3) формулага қўйиб текширамиз:

$$AA^{-1}=1/16\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-1&-3\\4&3&-2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-11&-7&-5\\14&6&-2\\-1&-5&-1\end{pmatrix}=$$

$$=1/16\begin{pmatrix}-11+28-1&-7+12-5&5-4-1\\11-14+3&7-6+15&-5+2+3\\-44+42+2&-28+18+10&20-6+2\end{pmatrix}=$$

$$=1/16\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ демак, тескари матрица тўғри топилган.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Берилган квадрат матрицанинг детерминантлари, нормалари ва ранглари топилсин:

1. а) $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}-1&0&8\\5&9&0\\0&4&3\end{pmatrix}$

с) $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&1\\2&3&2\end{pmatrix}$ д) $A=\begin{pmatrix}2&3&4&0\\1&5&7&0\\3&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Қуйидаги матрицалар рангини минорлар ажратиш усули билан ҳисобланг:

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Қуйидаги матрицалар рангини елементар алмаштириш усули билан ҳисобланг:

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 8 & 9 & 2 \\ 3 & 21 & 15 & 24 & 27 & 6 \\ 2 & 14 & 10 & 16 & 18 & 4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 6 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

Берилган квадрат матрицалар учун тескари матрицани икки усулда топинг:

17. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} tga & 1 \\ 2 & ctga \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Қуйидаги матрицали тенгламаларни ечинг:

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Берилган матрицаларнинг детерминантлари ва нормалари топилсин:

26. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

с) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Матрицаларнинг ранглари топилсин:

27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & -1 \\ 8 & 12 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Матрицанинг тескарисини топинг:

33. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Қуйидаги матрицали тенгламани ечинг:

37. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Жавоблар:

1. а) $|A|=4$, $H(A)=3$, $p(A)=2$ б) $|A|=133$, $H(A)=14$, $p(A)=3$

с) $|A|=0$, $H(A)=\sqrt{29}$, $p(A)=2$ д) $|A|=0$, $H(A)=\sqrt{116}$, $p(A)=2$

2. $p=3$
3. $p=2$
4. $p=2$
5. $p=2$
6. $p=2$
7. $p=2$
8. $p=2$
9. $p=1$
10. $p=1$
11. $p=2$
12. $p=2$
13. $p=3$
14. $p=2$
15. $p=2$
16. $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$
17. A^{-1} мавжуд емас.

18. $\begin{pmatrix} -ctga & 1 \\ 2 & -tga \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

25. а) $|A|=24$, $H(A)=7$, $p(A)=2$

б) $|A|=35$, $H(A)=\sqrt{61}$, $p(A)=2$

с) $|A|=0$, $H(A)=\sqrt{29}$, $p(A)=2$

д) $|A|=0$, $H(A)=6$, $p(A)=3$

26. $p(A)=2$

27. $p(A)=3$

28. $p(A)=3$

29. $p(A)=2$

30. $p=3$

31. $p=3$

32. Тескари матрица мавжуд емас.

33. $C^{-1}=\begin{pmatrix} 1/134 & 31/134 & -23/134 \\ 13/134 & -1/134 & 31/134 \\ 17/134 & -9/134 & 11/134 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} -5/2 & -5/2 & -1/5 \\ -6/5 & -4/5 & -4/5 \\ -7/10 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

5. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ЕЧИМИ ҲАҚИДА КРОНЕКЕР - КАПЕЛЛИ ТЕОРЕМАСИ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Кронекер-Капелли теоремаси (1) чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда ёки биргаликда емаслигини аниқлайди.

(1) чизиқли тенгламалар системасининг асосий ва озод ҳадлар ҳисобига кенгайтирилган матрицасини тузамиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$Б=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} & |b_2 \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} & |b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Теорема. Агар *А* матрица ранги *Б* матрица рангига тенг бўлиб, номаълумлар сонига ҳам тенг бўлса, яъни *р(А)=р(Б)=м* бўлса, (1) тенгламалар системаси аниқ бўлади, система биргаликда бўлиб ягона йечимга ега бўлади.

Агар *р(А)=р(Б)<м* бўлса, (1) система биргаликда бўлиб, чексиз кўп йечимга ега бўлади.

Агар *р(А)<р(Б)* бўлса, система биргаликда бўлмайди, система йечимга ега бўлмайди.

Мисоллар кўрамиз: 1. Қуйидаги системаларни биргаликда ёки биргаликда емаслигини текширамиз:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 25x_5 = 4 \end{cases}$

Бунинг учун асосий ва кенгайтирилган матрица рангини топамиз:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

2- сатр елементларидан 1- сатр елементларини айирамиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \qquad p(A)=2$$

$$Б=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

бу матрица рангини топиш учун яна юқоридаги ишни такрорлаймиз, натижада Б матрица қуйидаги кўринишни олади.

$$Б \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right), \qquad Б_1 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

матрица рангини топамиз:

$$M = |B_1| = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & 22 & 4 \end{vmatrix} = 225 - 154 = 71; \qquad p(Б_1) = 3$$

Демак, $p(Б)=3$ бўлиб, $p(A)\neq p(Б)$ система биргаликда емас.

б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Система биргаликда ёки биргаликда емаслигини текширинг.

Озод ҳадлар ҳисобига кенгайтирилган матрица тузамиз:

$$Б=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3- сатр елементларидан 1- сатр елементларини айирамиз:

$$Б=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

р(А)=р(Б)=2 еканини кўриш мумкин. Демак, система биргаликда.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Берилган чизиқли тенгламалар системаларининг биргаликда ёки биргаликда емаслигини текширинг:

2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ x_1+x_2+3x_3=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+4x_2-3x_3=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1-x_2=3 \\ 3x_1-5x_2=1 \\ 4x_1-7x_2=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \\ x_1+4x_2-2x_3+3x_4=2 \\ -x_1-2x_2-12x_3-7x_4=-4 \\ 3x_1+11x_2+x_3-4x_4=7 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=4 \\ x_1-4x_2=-1 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3=1 \\ 2x_1+10x_2+8x_3=3 \\ 3x_1+15x_2+12x_3=5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-1 \\ x_1+9x_2+6x_3=3 \\ x_1+3x_2+4x_3=1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=18 \\ 3x_1-x_2+4x_3=4 \\ 2x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=5 \\ x_1-3x_2+5x_3=4 \\ 2x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ x_1+x_2=3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=4 \\ x_1-4x_2=-1 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$

Жавоблар:

2. *р(А)=2, р(Б)=3* система биргаликда емас.

3. *р(А)=3, р(Б)=3* система биргаликда емас.

4. *р(А)=р(Б)* система биргаликда.

5. *р(А)=р(Б)* система биргаликда.

6. Система биргаликда.

7. *р(А)=р(Б)=3* система биргаликда.

8. *р(А)=р(Б)=2* система биргаликда.

9. *р(А)=2, р(Б)=3* система биргаликда емас.

10. *р(А)=р(Б)=2* система биргаликда.

11. Система биргаликда.

12. Сисема биргаликда.

13. *р(А)=р(Б)=2* система биргаликда.

14. *р(А)=2, р(Б)=2* система биргаликда.

15. *р(А)=2, р(Б)=3* система биргаликда емас.

16. *р(А)=р(Б)=3* система биргаликда.

17. *р(А)=р(Б)=2* система биргаликда.

18. Система биргаликда емас.

6. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ КРАМЕР ҲАМДА ТЕСКАРИ МАТРИЦА УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ

1. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Крамер формуласи детерминантлардан фойдаланиб система йечимини топишдир.

Система йечими Крамер формулалари деб аталган қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Бу йерда Δ номаълумлар олдидаги коеффицийентлардан тузилган квадрат матрица детерминанти, Δ_1, Δ_2, Δ_3 лар асосий матрицада мос равишда 1, 2, 3-устун елементларини озод ҳадлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантлар. Шуни таъкидлаш керакки, системада номаълумлар ва тенгламалар сони тенг бўлган ҳолларда Крамер формуласини қўллаш мақсадга мувофиқ.

Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, система ягона йечимга ега бўлади.

Агар $\Delta=0$ бўлиб, Δ_1, Δ_2, Δ_3 лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса система йечимга ега емас.

Агар $\Delta=0$ бўлиб, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ бўлса, система аниқмас, чексиз кўп йечимга ега бўлади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Буни мисолларда кўрамиз:

1-мисол.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ x_3 = \ 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = \ 4 \end{cases}$ системани Крамер формуласи билан йечинг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+8+9-8-3+12=14$$

$\Delta \neq 0$ бўлгани учун система аниқ ягона йечим Крамер формулалари ёрдамида топилади.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -32+8+30-8+40-24=14$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20+32+12-40-4+48=28$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8+80+72-64-24-30=42$$

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{28}{14} = 2, \quad x_3 = \frac{42}{14} = 3. \qquad (1;2;3)$$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 8x_2 - \ x_3 = \ 8 \\ 9x_1 + \ x_2 + 8x_3 = \ 0 \end{cases}$ системани Крамер формуласи ёрдамида йечинг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 9 & 1 & 8 \end{vmatrix} =256+6-18-216-32+4=266-266=0$$

$\Delta=0$ Крамер теоремасига кўра, система ёки аниқмас, ёки биргаликдамас. Δ_1 ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -128+24-128-2= -234\neq 0$$

$\Delta=0$, $\Delta_1\neq 0$ бўлгани учун Крамер теоремасига кўра система аниқланмаган.

c) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ Крамер формуласига кўра йечинг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 20-3-12+5+8-18=33-33=0$$

$\Delta=0$, демак система ёки аниқмас, ёки биргаликдамас. Δ_1, Δ_2, Δ_3 ларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -70+15-3+5-10+63=83-83=0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -20-21-4-5+56-6=56-56=0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10-5+84-35-4-30=84-84=0$$

$\Delta=0$, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ бўлгани учун система аниқмас, чексиз кўп йечимга ега.

Системани Гаусс алгоритми билан йечамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

берилган тенглама $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in R \end{cases}$ системага тенг кучли.

Бу тенгламани Крамер формуласи билан ечиш мумкин.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10-4 = -14$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3+7 & 1 \\ 3x_3-5 & 5 \end{vmatrix} = 5(x_3+7)-3x_3+5 = 5x_3+35-3x_3+5 = 2x_3+40 = 2(x_3+20)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & x_3+7 \\ 4 & 3x_3-5 \end{vmatrix} = -2(3x_3-5)-4(x_3+7) = -6x_3+10-4x_3-28 =$$

$$= -10x_3-18 = -2(5x_3+9)$$

$$x_1 = \frac{2(x_3+20)}{-14} = -\frac{x_3+20}{7}, \qquad x_2 = \frac{-2(5x_3+9)}{-14} = \frac{5x_3+9}{7}$$

Система йечими $\left(-\frac{x_3+20}{7}; \frac{5x_3+9}{7}; x_3\right)$ бўлади.

2. Чизиқли тенгламалар системасини тескари матрица усулида ечиш. Берилган (1) системани

$$AX=Б \qquad (2)$$

матрица кўринишида ёзиб оламиз.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(2) тенгламани ҳар икки томонини чапдан A^{-1} тескари матрицага кўпайтирамиз.

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B, \qquad A^{-1} \cdot A = E$ бўлгани учун

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (3)$$

тенглик ҳосил бўлади.

(3) формула билан топилган X устун матрица системанинг йечими бўлади.

1-мисолни а)-сини шу усул билан йечамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \Delta = |A| = 14$$

$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\\4&3&-2\end{pmatrix}$ матрица учун тескари матрица мавжуд,

чунки $\Delta=|A|\neq 0$. $A^{-1}=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}-7&7&0\\10&-6&2\\1&5&-4\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7&7&0\\10&-6&2\\1&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\10\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-56+70\\80-60+8\\8+50-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};$$

Жавоб: $(1;2;3)$.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Қуйидаги тенгламалар системасини Крамер ва тескари матрица усулида йечинг:

2. $\begin{cases}x+y-3z=-1\\2x-y+z=2\\3x+2y-4z=1\end{cases}$

3. $\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3=-1\\x_1-5x_2+x_3=7\\2x_1+x_2-3x_3=3\end{cases}$

4. $\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=2\\2x_1-3x_2+x_3=-1\\x_1-x_2+2x_3=5\end{cases}$

5. $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6\end{cases}$

6. $\begin{cases}2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20\\x_1+3x_2+2x_3+x_4=11\\2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40\\3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x-y-6z+3t+1=0\\7x-4y+2z-15t+32=0\\x-2y-4z+9t-5=0\\x-y-2z-6t+8=0\end{cases}$

8. $\begin{cases}2x+y+4z+8t=-1\\x+3y-6z+2t=3\\3x-2y+2z-2t=8\\2x-y-2z=4\end{cases}$

9. $\begin{cases}3x+2y+z=5\\x+y-z=0\\4x-y+5z=3\end{cases}$

10. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\3x_1-x_2-2x_3=-5\\7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$

11. $\begin{cases}2x-3y+z=2\\x+5y-4z=-5\\4x+y-3z=-4\end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-\ \ y+5z=2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-\ \ y+\ \ z=\ \ 2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+\ \ z=\ \ 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-\ \ y-\ \ z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=\ \ 4 \\ 3x_1+2x_2-\ \ x_3=\ \ 1 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=-3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=\ 1 \\ 4x_1+3x_2+3x_3=\ 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+\ \ x_2-2x_3=-7 \\ 3x_1-3x_2+\ \ x_3=12 \\ 5x_1-\ \ x_2-4x_3=-5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=\ \ 2 \\ x_1+\ \ x_2+\ 5x_3+2x_4=\ \ 1 \\ 2x_1+\ \ x_2+\ 3x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+\ \ x_2+\ 3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+\ \ x_3+2x_4+3=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6=0 \\ 6x_1+8x_2+\ \ x_3+5x_4+8=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8=0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x-\ \ y+3z=\ \ 9 \\ 3x-5y+\ \ z=-4 \\ 4x-7y+\ \ z=\ \ 5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-5y+3z+\ \ t=\ \ 5 \\ 3x-7y+3z-\ \ t=-1 \\ 5x-9y+6z+2t=\ \ 7 \\ 4x-6y+3z+\ t=\ \ 8 \end{cases}$

Жавоблар:

2.	(1; 1; 1)	3.	(2; -1; 0)
4.	(1; 2; 3)	5.	$x_1=x_2=1,\ x_3=x_4=-1$
6.	$x_1=1;\ x_2=x_3=2;\ x_4=0$	7.	*х=-3, й=0, з= -0,5, т=2/3*
8.	*х=2, й= -3, з= -1,5, т=0,5*	9.	(-1; 3; 2)
10.	(1; -2; -5)	11.	(5; 6; 10)
12.	(-1; 0; 1)	13.	(2; -1; -3)
14.	(1; -1; 2)	15.	(1; 0; 2)
16.	Система йечимга ега емас.	17.	(1; -2; 3)
18.	$x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=-1$	19.	$x_1=-2,\ x_2=-2,\ x_3=1,\ x_4=-1$
20.	Система йечимга ега емас.	21.	Система йечимга ега емас.

6. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ГАУСС ВА ГАУСС-ЖОРДАН УСУЛЛАРИ БИЛАН ЕЧИШ

1. Гаусснинг классик усули - бу берилган системанинг умумий йечимини топишдан иборат бўлиб, бунда системанинг тенгламалари устида елементар алмаштиришлар бажариб берилган система трапецияли ёки учбурчакли кўринишга келтирилади. Сўнг охирги тенгламадан бошлаб номаълумлар кетма-кет топилади.

1-мисол. а) $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=-4 \\ 3x_1-2x_2+x_3=11 \\ 4x_1-5x_2+x_3=9 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=-4 \\ -8x_2+13x_3=23 \\ -13x_2+17x_3=25 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=-4 \\ -8x_2+13x_3=23 \\ -\frac{33}{8}x_3=-\frac{99}{8} \end{cases}$

$x_3=3$, $x_2=2$, $x_1=4$ Жавоб: $(4;2;3)$.

2. Гаусс-Жордан усули номаълумларни кетма-кет йўқотиш Гаусс усули ва тескари матрица қуриш Жордан алгоритмига асосланган. Гаусс-Жордан усулига схема кўринишида қуйидагича ёзилади: $(A|B)\sim(E|X)$.

$(A|B)$-асосий матрицани озод ҳадлар ҳисобига кенгайтирилган матрица. E - бирлик матрица. X - тенглама йечимини ифодаловчи устун матрица.

б) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases}$

Системани Гаусс-Жордан усули билан йечинг.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-6&-4&6\\0&1&-3&-2&4\\0&0&24&12&-10\\0&0&18&18&-21\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-6&-4&6\\0&1&-3&-2&4\\0&0&1&1/2&-5/12\\0&0&18&18&-21\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-3&-2&2\\0&1&-3&-2&4\\0&0&1&1/2&-5/12\\0&0&0&9&-27/2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1/2&3/4\\0&1&0&-1/2&11/4\\0&0&1&1/2&-5/12\\0&0&0&1&-3/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&1/3\\0&0&0&1&-3/2\end{array}\right)$$

Жавоб: (0; 2; 1/3; -3/2).

с) $\begin{cases}x_1-\ x_2+\ \ x_3=1\\ x_1+\ x_2-2x_3=3\\ 2x_1+2x_2-4x_3=6\end{cases}$ Берилган система биргаликда, чунки

$$r\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}=r\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-2&3\\2&2&-4&6\end{array}\right)$$

Система чексиз кўп йечимга ега, умумий йечимни Гаусс-Жордан усули ёрдамида топамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-2&3\\2&2&-4&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-2&3\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&2&-3&2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&-3/2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&2\\0&1&-3/2&1\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{2}x_3=2\\ x_2-\dfrac{3}{2}x_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3+2\\ x_2=\dfrac{3}{2}x_3+1\end{cases}$$

Жавоб: $\left(\dfrac{1}{2}x_3+2;\ \dfrac{3}{2}x_3+1;\ x_3\right)\quad x_3\in R$.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

Қуйидаги тенгламалар системасини Гаусс, Гаусс-Жордан усули билан йечинг:

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126 \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -9 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 + 5x_4 - 7 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ 4x_4 + \ \ 5x_5 = \ \ 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17 \\ 2x_1 - 7x_2 + \ \ 7x_3 + \ \ 7x_4 + \ \ 2x_5 = 57 \\ x_1 + 4x_2 + \ \ 5x_3 + \ \ 3x_4 + 10x_5 = \ \ 7 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = \ \ 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 = \ \ 9 \\ x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 15 \end{cases}$

Жавоблар:

2. $\left\{\frac{8}{5} - x_3;\ 2x_3 - \frac{7}{5};\ x_3 \in R\right\}$

3. Система йечимга ега емас.

4. (1;0;2;-3)

5. Система йечимга ега емас.

6. $\left\{\frac{12}{5}x_3;\ -\frac{4}{5};\ x_3 \in R\right\}$

7. Система йечимга ега емас.

8. $x_1=-1;\ \ x_2=3;\ \ x_3=-2;\ \ x_4=2.$

9. $x_1=5;\ \ x_2=4;\ \ x_3=3;\ \ x_4=2;\ \ x_5=1.$

10. (1;-1;2)

11. $\left\{\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4;\ -\frac{17}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4;\ x_3 \in R;\ x_4 \in R\right\}$

12. Система йечимга ега емас.

13. $\left\{-\frac{2}{7};\ \frac{13}{7};\ 0\right\}$

14. (1; 2)

15. Система йечимга ега емас.

16. (1; 2; 3; 4)

17. Йечимга ега емас.

18. (2; 1; -3; 1)

19. (3; -5; 4; -2; 1)

20. (1; 2; -1)

8. $н$ – ЎЛЧОВЛИ АРИФМЕТИК ФАЗО. ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИ. ВЕКТОРНИ ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИ БЎЙИЧА ЁЙИШ

1. $н$ – ўлчовли арифметик фазо деб, мумкин бўлган $н$ та $x_1, x_2, ...x_н$ ҳақиқий сонларнинг тартибланган тизимлари тўпламига айтилади ва $Р_н$ каби белгиланади.

$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, ...x_н)$ – $Р_н$ фазонинг арифметик вектори ёки нуқтаси дейилади, $x_1, x_2, ...x_н$ ҳақиқий сонлар $\boldsymbol{x}$ векторнинг координаталари ёки компонентлари дейилади. Компонентлар сони арифметик вектор ёки нуқта ўлчови ҳисобланади.

Охйз координаталар системасида ҳар қандай $\boldsymbol{x}$ векторни $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$ кўринишда ёзиш мумкин. Векторнинг бу кўринишда ёзилиши унинг координата ўқлари бўйича ёйиб ёзишдир. a_x, $a_й$, $a_з$ векторнинг координата ўқларидаги проексиялари. *и, ж, к* - бирлик векторлар.

$\boldsymbol{a}$ ветор модули ёки узунлиги $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ формула бўйича ҳисобланади.

$\vec{a}$ воктор ё`налиши векторнинг координата ўқлари *Ох, Ой, Оз* билан ҳосил қилган бурчаклар билан аниқланади, бу бурчаклар косинуслари:

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\overline{a}|}$ формула билан ҳисобланади, бунда

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

тенглик ўринли бўлади.

Учлари $A(x_1; й_1; з_1)$, $B(x_2; й_2; з_2)$ нуқталар билан берилган $\overline{AB}$ вектор координатаси

$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ й_2 - й_1;\ з_2 - з_1)$

га тенг бўлади.

$$\text{Cos}\alpha=\frac{x_2-x_1}{\left|\overline{AB}\right|}; \quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\left|\overline{AB}\right|}; \quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\left|\overline{AB}\right|}$$

1-мисол. *АБС* учбурчакда, *АН* тўғри чизиқ *БАС* бурчак биссектриссаси ҳисобланади, *Н* нуқта *БС* томонда ётади. Агар $\left|\overline{AB}\right| = \bar{b}$, $\left|\overline{AC}\right| = \bar{c}$ бўлса, $\overline{AN}$ вектор узунлигини топинг.

Δ *АБС* дан $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$ учбурчакдан ички бурчак биссектриссасининг хоссасига кўра *БН:НС=б:с* ёки $|BN|:|BC|$*=б:(б+с);* $\frac{BN}{c-b}=\frac{b}{b+c}$, бундан *БН=*$\frac{b(\bar{c}-\bar{b})}{b+c}$

$\overline{AN}=\overline{AB}+\overline{BN}$ бўлгани учун $\overline{AN}=\bar{b}+\frac{b}{b+c}(\bar{c}-\bar{b})=\frac{b\bar{c}+c\bar{b}}{b+c}$ ҳосил бўлади.

2- мисол. *А*(1; 3; 2), *В(*5; 8;-1) нуқталар берилган бўлса $\bar{a}=\overline{AB}$ векторни топинг.

АБ векторнинг проексиялари

$a_x=x_2-x_1=5-1=4;$ $\quad a_й=й_2-й_1=8-3=5;$ $\quad a_з=з_2-з_1=-1-2=-3$

формулалар бўйича ҳисобланади. Демак, $\overline{AB}=4\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$ кўринишда ёзилади.

н –ўлчовли арифметик векторлар устида қуйидаги чизиқли амалларни бажариш мумкин.

$\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots x_н)$, $\bar{y}=(y_1;y_2;\ldots y_n)$ *н*- ўлчовли векторлар ва $\lambda>0$ ҳақиқий сон белирган бўлсин.

1) Векторларни қўшиш учун мос координаталари қўшилади:

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ \ldots;\ x_n+y_n)$$

2) $\bar{x}$ векторни λ сонга кўпайтириш учун берилган векторнинг ҳар бир координатасини λ сонига кўпайтирилади:

$$\lambda\bar{x}=(\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \ldots;\ \lambda x_н)$$

3) $\overline{x}$; $\overline{y}$ векторларнинг скаляр кўпайтириш учун мос координаталари кўпайтирилиб, йиғиндиси олинади:

$$(x \cdot y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ну_н)$$

4) Векторлар узунликлари $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots.. + x_n^2}$ формула бўйича топилади.

5) $\overline{x}$; $\overline{y}$ векорлар орасидаги бурчак

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{x};\overline{y})}{\left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots\ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots. + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots\ldots + y_n^2}}$$

формула билан топилади; *(φϵ[0;π])*

Мисоллар:

$\overline{x}$=(3; -4; 2;5), $\overline{y}$=(-1; 3 ; -7; 2) векторлар ва λ=2 ҳақиқий сон берилган:

а) 3$\overline{x}$+2$\overline{y}$ векторни;

б) $\overline{x}*\overline{y}$ скаляр кўпайтмасини;

с) $\overline{x}$, $\overline{y}$ веторлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш:

а) 3$\overline{x}$+2$\overline{y}$=(9; -12; 6; 15)+(-2; 6; -14; 4)=(7; -6; -8; 19);

б) $\overline{x}*\overline{y}$=-3-12-14+10=-19;

с) $\cos\varphi=\frac{(\overline{x};\overline{y})}{\left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right|}$; $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{9+16+4+25} = \sqrt{54}$; $\left|\overline{y}\right| = \sqrt{1+9+49+4} = \sqrt{63}$;

$$\cos\varphi=\frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}}; \quad \varphi=-\arccos\frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}}=-\arccos\frac{-19}{9\sqrt{42}}.$$

2. Векторлар системаси. Векторни векторлар системаси бўйича ёйиш.

н-ўлчовли *м* та вектордан иборат векторлар *н*-ўлчовли векторлар системасини ташкил етади.

$$\begin{cases} \overline{a_1}(a_{11}; a_{12}; \ldots\ldots a_n) \\ \overline{a_2}(a_{21}; a_{22}; \ldots. a_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots \\ \overline{a_m}(a_{m1}; a_{m2}; \ldots.. a_{mn}) \end{cases}$$

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторлар системаси ва λ_1, λ_2, ….. $\lambda_м$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин.

$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \ldots.. + \lambda_м\overline{a_m}$ векторга $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторнинг λ_1, λ_2, ….. $\lambda_м$ коеффициентли чизиқли комбинацияси дейилади.

Векторлар системаси ва $\overline{b}(b_1; b_2; \ldots\ldots; b_m)$ вектор берилган бўлса $\overline{b}$ векторни система векторлари бўйича ёйиш учун $\sum_{j=1}^{m} \overline{a_j} x_j = \overline{b}$ чизиқли тенгламалар системасининг йечимларидан бирини кўрсатиш йетарли.

Агар чизиқли тенгламалар системаси биргина йечимга ега бўлса, $\overline{b}$ вектор система векторлари бўйича биргина усулда, агар чексиз кўп йечимга ега бўлса, чексиз кўп усулда ёйилади, агар йечимга ега бўлмаса $\overline{b}$ векторни система векторлари бўйича ёйиб бўлмайди.

2- мисол.

$\overline{b}(3; -1; 4; 5)$ векторни

$\overline{a_1}(2;1;3;2)$, $\overline{a_2}(1;-2;4;-4)$, $\overline{a_3}(3;1;-5;2)$, $\overline{a_4}(-4;-3;1;-6)$ векторлар системаси бўйича ёйинг.

Бунинг учун $\overline{b} = \overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + \overline{a_3}x_3 + \overline{a_4}x_4$ вектор тенглама тузиб, уни Гаусс - Жордан усулида йечмиз: $(A|B) \sim (E|X)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

берилган векторлар системаси координаталаридан тузилган матрицани озод ҳадлар устуни ҳисобига кенгайтирилган матрица. *A* матрица ўрнида бирлик матрица ҳосил қилиш учун 2-сатр елементларини (-2) га кўпайтириб 1-сатрга, (-3) га кўпайтириб 3-сатрга, (-2) га кўпайтириб 4-сатрга қошамиз: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & -8 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$ бундан системанинг йечимга ега емаслиги кўринади: $7 \neq 0$.

Демак, $\overline{b}$ векторни $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ векторлар системаси бўйича ёйиш мумкин емас.

3-мисол. $\overline{b}(5;1;6)$ векторни

$\overline{a_1}(1;2;1), \overline{a_2}(2;-1;3), \overline{a_3}(3;-1;4)$ векторлар системаси бўйича ёйинг.

Вектор тенглама тузиб Гаусс - Жордан усулида йечамиз:

$$\overline{b} = \overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + \overline{a_3}x_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & -2/5 & -4/5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{array} \qquad \overline{b} = \overline{a_1} - \overline{a_2} + 2\overline{a_3}$$

Мустақил ечиш учун масалалар:

1. $\overline{r} = \overline{OM} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k}$ вектор ясалсин ва унинг радиус векторининг узунлиги ҳамда йўналиши аниқлансин. Векторнинг узунлиги ҳамда йўналиши аниқлансин. $\mathrm{Coc}^2\alpha + \cos^2\beta + + \cos^2\gamma = 1$ формула бўйича текширинг.

2. *M* нуқтанинг радиус вектори *0х* ўқ билан 45^0 ва *0й* ўқ билан 60^0 бурчак ҳосил етади. Векторнинг узунлиги *p*=6. Агар *M* нинг аппликатаси манфий бўлса, унинг координаталарини аниқланг ва $\overline{OM} = \overline{r}$ векторни $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ лар орқали ифодаланг.

3. *x0й* текисликда $A(4;2)$, $B(2;3)$, $C(0;5)$ нуқталар берилган ва $\overline{OA}=\overline{a},\ \overline{OB}=\overline{b},\ \overline{OC}=\overline{c}$ векторлар ясалган. $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$ *va* $\overline{c}$ векторлар бўйича топилсин.

4. Параллелограммнинг кетма-кет учта $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$ учлари берилган. Унинг тўртинчи учини топинг.

5. Учлари $A(2; -1; 3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$ нуқталарда бўлган учбурчак *АБС* нинг бурчаклари аниқлансин.

6. $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}$ ва $\overline{b}=-\overline{2j}+\overline{k}$ векторларда ясалган параллелограмм диоганаллари орасидаги бурчак топилсин.

7. $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$ ва $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$ векторлар берилган. Пр$_{\overline{b}}\,\overline{a}$ ва Пр$_{\overline{a}}\,\overline{b}$ аниқлансин.

8. 1) Агар *м* ва *н* ўзаро 30^0 бурчак ташкил етувчи бирлик векторлар бўлса, $(м+н)^2$ ҳисоблансин.

2) Агар $|\overline{a}|=2\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=4$ ҳамда $(\overline{a}\wedge\overline{b})=135^0$ бўлса, $(а\text{-}б)^2$ ҳисоблансин.

9. Ўзаро компланар $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлар берилган бўлиб, $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=2, |\overline{c}|=5$ ва $(\overline{a}\wedge\overline{b})=60^0$, $(\overline{b}\wedge\overline{c})=60^0$ бўлса, $\overline{u}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ вектор ясалсин, $|\overline{u}|=\sqrt{(a+b+c)^2}$ формула бўйича унинг модули ҳисоблансин.

10. Тенг ёнли *ОАСБ* трапецияда *М* ва *Н* нуқталар мос равишда *БС*=2, *АС*=2 томонларнинг ўрталари. Трапециянинг ўткир бурчаги 60^0 га тенг. $\overrightarrow{OM}$ *va* $\overrightarrow{ON}$ векторлар орасидаги бурчак аниқлансин.

11. $\overline{a}(2;-1;3;4), \overline{b}(5;2;-2;6)$ векторлар берилган:

а) $2\overline{a}$, $5\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{a}-2\overline{b}$ векторларни;

б) $(\overline{a},\overline{b})$, $(3\overline{a}+b, \overline{a}-2\overline{b})$ скаляр кўпайтмаларини;

c) $\overline{a}$ *va* $\overline{b}$ вектор орасидаги бурчакни топинг.

Қуйидаги $\overline{b}$ векторларни берилган $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ векторлар системаси бўйича ёйиш мумкин ёки мумкин емаслигини кўрсатинг ва ёзинг.

12. $\overline{b} = (-4;9); \overline{a_1} = (1;-3); \overline{a_2} = (2;-5);$

13. $\overline{b} = (8;-3;-10;10); \overline{a_1} = (1;0;4;3); \overline{a_2} = (1;1;-4;5);$
$\overline{a_3} = (1;-2;0;3); \overline{a_4} = (-2;3;1;4)$

14. $\overline{b} = (3;-1;4;5); \overline{a_1} = (2;1;3;2); \overline{a_2} = (1;-2;4;-4);$
$\overline{a_3} = (3;1;-5;2); \overline{a_4} = (-4;-3;1;-6)$

15. $\overline{b} = (9;-2;-3); \overline{a_1} = (1;-1;2); \overline{a_2} = (-5;-1;-4); \overline{a_3} = (4;1;5)$

16. λ нинг қандай қийматларида $\overline{b} = (1;3;5)$ векторни

$\overline{a_1} = (3;2;5), \overline{a_2} = (2;4;7), \overline{a_3} = (5;6;\lambda)$

векторлар орқали ёйиш мумкин?

17. $A(2;2;0)$ ва $B(0;-2;5)$ нуқталар берилган. $\overline{AB} = \overline{u}$ вектор ясалсин, унинг узунлиги ва йўналиши аниқлансин.

18. 1) $(a+б)^2$;

2) $(a+б)^2-(a-б)^2$ ифодалардаги қавслар очилсин ва ҳосил бўлган формулаларнинг геометрик маъноси аниқлансин.

19. Агар $\overline{m}$ *va* $\overline{n}$ ораларидаги бурчак 60^0 га тенг бирлик векторлар бўлса, $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ ва $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$ векторлардан ясалган параллелограмм диоганалларининг узунликлари аниқлансин.

20. Мунтазам тетраедрнинг бир учидан ўтказилган икки текис бурчагининг биссектрисалари орасидаги бурчак аниқлансин.

21. $\overrightarrow{OA} = \overline{a}$ *va* $\overrightarrow{OB} = \overline{b}$ векторлар берилган. $|\overline{a}| = 2; |\overline{b}| = 4$ ва $(a\hat{\ }б)=60^0$. Учбурчак *ОАБ* нинг *ОМ* медианаси билан *ОА* томони орасидаги бурсак аниқлансин.

22. Томонлари 6 ва 4 *см* бўлган тўғри тўртбурчак учидан қарши томонларини тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар топилсин.

24. $\overline{m}$ *va* $\overline{n}$ лар ўзаро 120^0 бурчак ташкил етувчи бирлик векторлар бўлса, $\overline{a} = 2\overline{m} + 4\overline{n}$ ва $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

25. $\overline{a}(1; -3; 2; 0),\ \overline{b}(4; -2; 1; 3),\ \overline{c}(5; -3; 2; 1),\ \overline{d}(1; 2; 2; -3)$ векторлар учун қуйидагиларни ҳисобланг:

а) векторларнинг ортогоналларини аниқланг;

б) $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}),\ (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}),\ (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{d})$ ларни ҳисобланг.

Жавоблар:

1. р=7, $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=6/7$.
2. $M(3\sqrt{2}; 3; -3),\ \overline{r} = 3(\sqrt{2}\vec{i} + \overline{j} - \overline{k})$
3. $\overline{a} = 2\overline{b} - 0{,}8\overline{c}$
4. Кўрсатма *АД=БС* тенгликдан улар координаталарининг тенглиги *(х-1=6-3)* келиб чиқади (4; 0; 6)
5. *Б*=*С*=45^0
6. 90^0
7. $\text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\text{Пр}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$
8. 1) $2+\sqrt{3}$ 2) 40
9. 7
10. $\overline{OM} = \sqrt{(2+\overline{m})^2} = \sqrt{7};\quad \overline{ON} = \sqrt{(3\overline{m}+\overline{n})^2} = \sqrt{13};$

$\cos\varphi = \frac{\overline{OM} * \overline{ON}}{|\overline{OM}| * |\overline{ON}|} = \frac{17}{2\sqrt{91}} = 0{,}891;\ \varphi = 27^0$

11. *(4; -2; 6; 8); (25; 1; 9; 38); (-8; -5; 7; -8)*
12. $\overline{b} = 2\overline{a_1} - 3\overline{a_2}$

13. $\overline{b} = \overline{a_1} + 3\overline{a_2} - 2\overline{a_4}$

14. $\overline{b} = \overline{a_1} + 2\overline{a_2} - 3\overline{a_4}$

15. $\overline{b} = \overline{a_1} - 7\overline{a_2} - 7\overline{a_3}$

16. $\lambda \neq 12$ да

17. $\overline{u} = 3\sqrt{5}$; сосα=-$\frac{2}{3\sqrt{5}}$

18. $(a+б)^2 = a^2 + б^2 + 2абсос\varphi$ (косинуслар теоремаси) $(a+б)^2$-$(a-б)^2$=-$a^2+2б^2$ (параллелограмм диоганалларининг хоссаси).

19. $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$

20. 5/6

21. cos=$\frac{2}{\sqrt{7}}$

22. cosφ=0,26$\sqrt{10}$; φ=$34^0 42$ъ

23. D(-1;1;1); φ=120^0

24. 120^0

25. а) ***с*** ва ***д***

б) $\cos(a,b) = \frac{6}{\sqrt{105}}$; $\cos(b,c) = \frac{31}{3\cdot\sqrt{26}}$; $\cos(b;d) = -\frac{5}{6\cdot\sqrt{15}}$

9. ЧИЗИҚЛИ БОҒЛИҚ ВА ЧИЗИҚЛИ ЕРКЛИ ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИ

Н ўлчовли *м* та векторлардан иборат векторлар системаси берилган бўлсин.

$$\begin{cases} \overline{a_1}(a_{11}\, a_{12}\, ...\, a_{1n}) \\ \overline{a_2}(a_{21}\, a_{22}\, ...\, a_{2n}) \\ -\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- \\ \overline{a_m}(a_{m1} a_{m2}\, ...\, a_{mn}) \end{cases} \qquad (1)$$

(1) Векторлар системаси чизиқли еркли ёки чизиқли боғлиқ еканини аниқлаш учун берилган векторлар системаси векторларидан вектор тенглама тузамиз:

$$\overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + ... + \overline{a_m}x_m = \overline{0} \qquad (2)$$

бу ерда $\overline{0}$ - *н* ўлчовли нол вектор. (1) Тенглама *м* номаълумли *н* та бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. Бу система аниқ бўлиб, ягона нол ечимга ега бўлса, берилган векторлар системаси ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган ёки чизиқли еркли векторлар системаси бўлади.

Агар система аниқмас бўлиб, нол ечимдан ташқари нолмас ечимларга ега бўлса, векторлар системаси чизиқли бог`лиқ система бўлади; бунда $x_1, x_2, \ldots, x_м$ лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$, ..., $\overline{a_m}$ лардан бирини қолган векторлар орқали чизиқли ифодалаш мумкин, бу еса система чизиқли боғлиқ еканини кўрсатади. (1) системанинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли еркли еканини топиш учун векторлар координаталаридан матрица тузамиз. Агар *р(А)=м* бўлса, система чизиқли еркли, агар *р(А)<м* бўлса, чизиқли боғлиқ бўлади.

Мисол-1. $\overline{a_1}(1;4;5)$, $\overline{a_2}(2;-1;1)$, $\overline{a_3}(-1;1;3)$ векторларнинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли еркли еканини аниқланг.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ матрица рангини аниқлаймиз.

$M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$=-3+10-4-5-24-1=-27≠0

$$p(A)=3, \qquad p(A)=м=3.$$

Векторлар системаси чизиқли еркли.

Мисол-2. $\overline{a_1}(1;3;2)$, $\overline{a_2}(2;7;3)$, $\overline{a_3}(-1;2;-7)$ векторларнинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли еркли еканини аниқланг:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; $M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$=-49+8-9+14+42-6=64-64=0

$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$=7-6=1≠0 $p(A)=2$,

векторлар сони *м=3*. *p(A)≠м.* Векторлар системаси чизиқли боглиқ.

Мустақил ечиш учун масалалар:

Векторлар системасининг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли боғлиқ емаслигини аниқланг:

1. $\overline{a_1} = (1;2;3)$, $\overline{a_2} = (3;6;7)$
2. $\overline{a_1} = (5;4;3)$, $\overline{a_2} = (3;3;2)$, $\overline{a_3} = (8;1;3)$
3. $\overline{a_1} = (4;-2;6)$, $\overline{a_2} = (6;-3;9)$
4. $\overline{a_1} = (4;-5;2;6)$, $\overline{a_2} = (2;-2;1;3)$, $\overline{a_3} = (6;-3;3;9)$, $\overline{a_4} = (4;-1;5;6)$
5. $\overline{a_1} = (2;-3;1)$, $\overline{a_2} = (3;-1;5)$, $\overline{a_3} = (1;-4;3)$
6. $\overline{a_1} = (1;0;0;2;5)$, $\overline{a_2} = (0;1;0;3;4)$, $\overline{a_3} = (0;0;1;4;7)$, $\overline{a_4} = (2;-3;4;11;12)$
7. $\overline{a_1} = (1;1;1)$, $\overline{a_2} = (0;1;1)$, $\overline{a_3} = (0;0;1)$
8. $\overline{a_1} = (3;2;1)$, $\overline{a_2} = (2;-3;0)$, $\overline{a_3} = (-3;-2;13)$

9. $\overline{a_1} = (3;2;1), \quad \overline{a_2} = (2;3;1), \quad \overline{a_3} = (-1;-4;-1)$.

10. $\overline{a} = (1;-3;4), \quad \overline{b} = (2;-1;0)$

11. $\overline{a_1} = (1;3;1;0), \quad \overline{a_2} = (-2;1;-3;-1), \quad \overline{a_3} = (4;0;5;1), \quad \overline{a_4} = (3;2;-1;-4)$

12. $\overline{x_1} = (-3;-1;5), \quad \overline{x_2} = (6;-3;15), \quad \overline{x_3} = (0;-5;25)$;

13. $\overline{a_1} = (1;1;1;1), \quad \overline{a_2} = (1;2;1;2), \quad \overline{a_3} = (3;2;-1;-4)$

14. $\overline{x_1} = (1;-1;1;0), \quad \overline{x_2} = (1;1;-1;1), \quad \overline{x_3} = (-1;3;-3;1)$

15. λ қандай қийматларида вектор $\overline{x} = (1;3;5)$ ни қуйидаги $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ векторлар орқали ёйиш мумкин?

$$\overline{a_1} = (3;2;5), \quad \overline{a_2} = (2;4;7), \quad \overline{a_3} = (5;6;\lambda)$$

Қуйидаги векторлар системасини чизиқли боғлиқ ёки чизиқли боғлиқ емаслигини аниқланг:

16. $\overline{a} = (-3;-2); \quad \overline{b} = (2;7)$

17. $\overline{a} = (1;-4;3); \quad \overline{b} = (2;-7;6)$

18. $\overline{a} = (1;-2;-3), \quad \overline{b} = (2;1;-1), \quad \overline{c} = (3;7;4)$

19. $\overline{a_1} = (2;0;-1;1), \quad \overline{a_2} = (3;8;1;5), \quad \overline{a_3} = (1;0;1;-3), \quad \overline{a_4} = (-1;0;1;-3)$

20. $\overline{a_1} = (1;2;0); \quad \overline{a_2} = (3;-1;1); \quad \overline{a_3} = (0;1;1)$

21. $\overline{x_1} = (1;1;1;1), \quad \overline{x_2} = (1,-1,-1;1), \quad \overline{x_3} = (1;-1;1;1), \quad \overline{x_4} = (1;1;-1;-1)$

22. $\overline{x_1} = (4;-5;2;6), \quad \overline{x_2} = (2;-2;1;3), \quad \overline{x_3} = (6;-3;3;9), \quad \overline{x_4} = (4;-1;5;6)$

$\overline{a_1} = (4;1;3;-2), \quad \overline{a_2} = (1;2;-3;2), \quad \overline{a_3} = (16;9;1;3), \quad \overline{a_4} = (0;1;2;3), \quad \overline{a_5} = (1;-1;15;0)$

23. $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5}$ векторлар учун қуйидаги комбинацияни топинг:

а) $\frac{1}{2}\overline{a_1} + 3\overline{a_2} - \frac{1}{2}\overline{a_4} + \overline{a_5}$ б) $\overline{a_2} - 5\overline{a_3} + \overline{a_4} + 2\overline{a_5}$

Тенгламадан x ни топинг:

24. $2(\overline{a_1} - x) + 5(\overline{a_4} + x) = 0$ 25. $3(\overline{a_3} + 2x) - 2(\overline{a_5} - x) = 0$

Қуйидаги $\overline{b}$ векторни $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ векторлар системасининг чизиқли комбинацияси кўринишида ёйиш мумкин ёки мумкин эмаслигини кўрсатинг:

26. $\overline{b_1} = (-5;-3;-2)$, $\overline{a_1} = (1;2;3)$, $\overline{a_2} = (0;1;-1)$, $\overline{a_3} = (3;4;-1)$

27. $\overline{b} = (5;1;-1;4)$, $\overline{a_1} = (1;2;0;3)$, $\overline{a_2} = (4;3;-2;1)$, $\overline{a_3} = (2;5;-4;-1)$, $\overline{a_4} = (1;6;-1;3)$

λ нинг қандай қийматлари вектор $\overline{b}$ ни қуйидаги $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, векторлар орқали чизиқли ёйиш мумкин:

28. $\overline{a_1} = (2;3;5)$; $\overline{a_2} = (3;7;8)$; $\overline{a_3} = (1;-6;1)$, $\overline{b} = (7;-2;\lambda)$

29. $\overline{a_1} = (3;2;5)$; $\overline{a_2} = (2;4;7)$; $\overline{a_3} = (5;6;\lambda)$; $\overline{b} = (2;4;6)$

30. $\overline{a_1} = (3;0;0)$; $\overline{a_2} = (-1;1;0)$; $\overline{a_3} = (1;0;1)$; $\overline{b} = (-1;-1;\lambda)$

31. $\overline{a_1} = (0;1;0)$; $\overline{a_2} = (1;0;1)$; $\overline{a_3} = (0;4;0)$; $\overline{b} = (2;\lambda;-2)$?

Жавоблар:

1. Чизиқли эркли.
2. Чизиқли боғлиқ.
3. Чизиқли боғлиқ.
4. Чизиқли боғлиқ.
5. Чизиқли эркли.
6. Чизиқли эркли.
7. Чизиқли эркли.
8. Чизиқли эркли.
9. Чизиқли боғлиқ.
10. Чизиқли боғлиқ эмас.
11. Чизиқли боғлиқ.
12. Чизиқли боғлиқ.
13. Чизиқли боғлиқ эмас.
14. Чизиқли боғлиқ.
15. $\lambda \neq 12$.
16. Чизиқли боғлиқ эмас.
17. Чизиқли боғлиқ эмас.
18. Чизиқли боғлиқ.
19. Чизиқли боғлиқ эмас.
20. Чизиқли боғлиқ эмас.
21. Чизиқли боғлиқ эмас.
22. Чизиқли боғлиқ.

26. Ёйиш мумкин.
27. Ёйиш мумкин.
28. $\lambda=15$.
29. $\lambda \neq 12$.
30. λєР.
31. Ҳеч қандай λ учун.

10. ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИНИНГ РАНГИ ВА БАЗИСИ. ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЛЕМЕНТАР АЛМАШТИРИШЛАР. КАНОНИК БАЗИС

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ …., $\boldsymbol{a}_н$ векторлар системаси берилган бўлсин. Берилган *векторлар системасининг базиси* деб унинг чизиқли боғлиқ бўлмаган шундай бир қисмига айтиладики, бунда берилган системанинг ҳар бир вектори базис векторлари орқали ёйилиши мумкин бўлади. Берилган векторлар системасининг ихтиёрий базиси таркибидаги векторлар сонига унинг *ранги* дейилади.

1. Мисол. Қуйидаги векторлар системасининг базисларидан бирини қуринг ва рангини аниқланг:

$\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(0;3;4;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;6;-5)$, $\boldsymbol{a}_4(5;1;2;-4)$

Йечиш: $\boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2x_2 + \boldsymbol{a}_3x_3 + \boldsymbol{a}_4x_4 = \boldsymbol{0}$ вектор тенглама умумий йечимини Гаусс-Жордан усулида қурамиз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Йечилган системадан x_1, x_2, x_4 - йечилган номаълумлар, x_3 еса еркин номаълум еканлиги кўриниб турибди. Демак, берилган векторлар системасининг базиси $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ ва $\boldsymbol{a}_4$ векторлар системаси бўлиб, системанинг ранги базисидаги векторлар сони 3 га тенг.

Агар берилган иккита *н* ўлчовли $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ векторлар ўзаро *ортогонал векторлар* дейилади.

n ўлчовли нолмас векторлардан таркиб топган векторлар системаси берилган бўлиб, система векторларининг ҳар қандай икки жуфти ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда системага *ортогонал векторлар системаси* дейилади.

2. Мисол. Қуйидаги векторлар системаси ортоганалми?

$\boldsymbol{a}_1(0;5;-2)$**,** $\boldsymbol{a}_2(29;-2;-5)$, $\boldsymbol{a}_3(2;4;10)$

Ечиш:

$(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2)$=0-10+10=0

$(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2)$=0+20-20=0

$(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2)$=58-8-50=0

Берилган векторлар системаси ортогонал вектолар системаси екан.

Тенг ўлчовли *н* та $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_н$ чизиқли еркли векторлар системаси устида *ортоганал векторлар системасини* қуриш, яъни мос равишда $\boldsymbol{б}_1, \boldsymbol{б}_2, \ldots \boldsymbol{б}_к$ ортогонал система билан алмаштириш мумкин. Бунинг учун *Шмидт формулалари*дан фойдаланамиз:

$\boldsymbol{б}_1=\boldsymbol{a}_1$

$$\mathrm{b_t} = a_t - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(b_i \cdot a_i)}{(b_i \cdot bi)} b_i \qquad t\epsilon\{2;3;\ldots к\}$$

3. Мисол. $\boldsymbol{a}_1(1;1;1)$**,** $\boldsymbol{a}_2(0;1;1)$**,** $\boldsymbol{a}_3(0;0;1)$ векторлар системаси устида ортогонал система қуринг. ранг $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$=3 чизиқли еркли система екан.

$\boldsymbol{б}_1=\boldsymbol{a}_1(1;1;1)$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = (0;1;1) - \frac{2}{3}(1;1;1) = \left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = \frac{(b_2 \cdot a_3)}{(b_2 \cdot b_2)} b_2 = (0;0;1) - \frac{1}{3}(1;1;1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Берилган векторлар системаси устида қурилган ортогонал система векторларини бутун координатали векторларга айлантириб, (1;1;1); (-2;1;1); (0;-1;1) натижани оламиз.

Нолмас ***b*** *векторнинг нормалланган* ёки *бирлик вектори* деб, $\frac{b}{|b|}$ векторга айтилади.

Ҳар бир вектори нормалланган, яъни бирлик вектор кўринишига келтирилган ортоганал системага *ортонормалланган векторлар системаси* дейилади.

3. Мисол. Юқоридаги мисолга топилган ортонормал $\boldsymbol{b_1}(1;1;1)$; $\boldsymbol{b_2}(-2;1;1)$; $\boldsymbol{b_3}(0;-1;1)$ системанинг ҳар бир векторини бирлик кўринишга келтирамиз.

$$\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1;1;1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}(-2;1;1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}(0;-1;1) = \left(0;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Мустақил ечиш учун масалалар:

Қуйида берилган векторлар системасининг базисларидан бирини қуринг ва рангларини аниқланг:

1. $\boldsymbol{a_1}=(1;-2;-5)$, $\boldsymbol{a_2}=(3;4;-1)$, $\boldsymbol{a_3}=(2;-3;0)$
2. $\boldsymbol{a_1}=(1;1;-2;-5)$, $\boldsymbol{a_2}=(3;4;-1;2)$, $\boldsymbol{a_3}=(4;1;-2;3)$, $\boldsymbol{a_4}=(5;2;-3;1)$
3. $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ базисда $\boldsymbol{a_1}=(1;1;0)$, $\boldsymbol{a_2}=(1;-1;1)$, $\boldsymbol{a_3}=(-3;5;6)$ векторлар берилган.

$\boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{a_2}$; $\boldsymbol{a_3}$ векторлар базисни ташкил қилишини кўрсатинг.

4. $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ базисда вектор ***б***=(4;-4;5) берилган. Шу векторни қуйидаги $\boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{a_2}$; $\boldsymbol{a_3}$ базисда ифодаланг: $\boldsymbol{a_1}=(1;1;0)$, $\boldsymbol{a_2}=(1;-1;1)$, $\boldsymbol{a_3}=(-3;5;6)$

5. e_1; e_2; e_3 базисда берилган a=(1;2;0), $б$=(3;-1;1), c=(0;1;1) векторлар ўзлари базис ташкил қилишини кўрсатинг.

6. e_1; e_2; e_3 базисда қуйидаги $a, б, c$ векторлар берилган: $a=e_1+e_2+e$, $б=2e_2+3e_3$, $c=e_2+5e_3$. $a, б, c$ векторлар базис ташкил қилишини исботланг. Вектор $б=2e_1-e_2+e_3$ ни $a, б, c$ базисдаги координаталарини топинг.

Қуйидаги векторлар системасининг базисларини топинг:

7. a_1=(1;2;0;0); a_2=(1;2;3;4); a_3=(3;6;0;0);

8. a_1=(1;2;3;4); a_2=(2;3;4;5); a_3=(3;4;5;6); a_4=(4;5;6;7);

Берилган векторлар системасининг ранги ва барча базислари топилсин:

9. a_1=(1;2;0;0); a_2=(1;2;3;4); a_3=(3;6;0;0);

10. a_1=(1;2;3;4); a_2=(2;3;4;5); a_3=(3;4;5;6); a_4=(4;5;6;7);

11. a_1=(2;1;-3;1); a_2=(4;2;-6;2); a_3=(6;3;-9;3); a_4=(1;1;1;1);

Векторлар жуфтликларидан ўзаро ортоганалми:

12. a_1(4;-5) ва a_2(1;0);

13. a_1(4;1;2) ва a_2(-1;0;2);

14. a_1(2;0;4;-1) ва a_2(1;2;3;4);

15. a_1(1;3;2;-3) ва a_2(1;1;1;2)?

Қуйида берилган чизиқли еркли векторлар системалари устида ортогонал ва ортонормалланган векторлар системалари қурилсин:

16. a_1(1;0) ва a_2(1;1)

17. a_1(1;1;1;0), a_2(0;1;1;1), a_3(0;0;1;1)

Қуйида берилган векторлар системасининг ранги ва базислари топилсин:

18. a_1=(5;2;-3;1); a_2=(4;1;-2;3); a_3=(1;1;-1;2); a_4=(3;4;-1;2)

19. a_1=(2;-1;3;5); a_2=(4;-3;1;3); a_3=(3;-2;3;4); a_4=(4;-1;15;17); a_5=(7;-6; -7;0)

20. a_1=(2;1;-3;1); a_2=(4;2;-6;2); a_3=(6;3;-9;3); a_4=(1;1;1;1)

21. $\boldsymbol{a}_1$=(1;2;3); $\boldsymbol{a}_2$=(2;3;4); $\boldsymbol{a}_3$=(3;2;3); $\boldsymbol{a}_4$=(4;3;4) $\boldsymbol{a}_5$=(1;1;1)

22. $\boldsymbol{a}_1$=(5;2;-3;1); $\boldsymbol{a}_2$=(4;1;-2;3); $\boldsymbol{a}_3$=(1;1;-1;-2); $\boldsymbol{a}_4$=(3;4;-1;2)

23. $\boldsymbol{a}_1$=(2;-1;3;5); $\boldsymbol{a}_2$=(4;-3;1;3); $\boldsymbol{a}_3$=(3;-2;3;4); $\boldsymbol{a}_4$=(4;-1;15;17); $\boldsymbol{a}_5$=(-7;-6;-7;0)

Қуйида берилган чизиқли еркли векторлар системалари устида ортогонал ва ортонормалланган векторлар системалари қурилсин:

24. $\boldsymbol{a}_1$(1;1), $\boldsymbol{a}_2$(0;2)

25. $\boldsymbol{a}_1$(1;0;1;0), $\boldsymbol{a}_2$(0;1;1;1), $\boldsymbol{a}_3$(1;1;0;1)

26. $\boldsymbol{a}_1$(1;1;1;1), $\boldsymbol{a}_2$(1;1;1;0), $\boldsymbol{a}_3$(1;0;1;1)

Жавоблар:

1. Базиси $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, ранги 3

2. Базиси $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, ранги 3

4. $\boldsymbol{б}=0.5\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-0.5\boldsymbol{a}_3$

6. (2;-2;1)

7. а) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$; б) $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$

8. Ихтиёрий иккита вектор базис ташкил етади.

9. $p=2$; $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$, $(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$

10. $p=2$; $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$, $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4)$

11. $p=2$; $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4)$, $(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4)$, $(\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$

12. Ортогонал емас.

13. Ортогонал.

14. Ортогонал емас.

15. Ортогонал.

16. Ортогонал ва ортонормал векторлар: $\boldsymbol{б}_1$(1;0), $\boldsymbol{б}_2$(0;1).

17. $\boldsymbol{б}_1$(1;1;1;0), $\boldsymbol{б}_2$(-2;1;1;3), $\boldsymbol{б}_3$(1;-3;2;1)

$$\frac{b_1}{|b_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};0\right),\qquad \frac{b_2}{|b_2|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{3}{\sqrt{15}}\right),$$

$$\frac{b_3}{|b_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{15}};-\frac{3}{\sqrt{15}};\frac{2}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

18. $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ - *базис*, $p=3$

19. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ – *базис*, $p=3$

20. а) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4$ б) $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ с) $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$

21. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_5$ ва $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ лардан ташқари ихтиёрий учта вестор базисни ташкил қилади.

22. Иккита базис.

23. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ базис ташкил қилади.

24. $\boldsymbol{б}_1$=(1;1); $\boldsymbol{б}_2$=(-1;1); $\frac{b_1}{|b_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{b_2}{|b_2|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

25. $\boldsymbol{б}_1$=(1;0;1;0); $\boldsymbol{б}_2$=(-1;2;1;2); $\boldsymbol{б}_3$=(2;1;-2;1)

$\frac{b_1}{|b_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$, $\frac{b_2}{|b_2|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$, $\frac{b_3}{|b_3|}=\left(\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{2}{\sqrt{10}};1\right)$,

26. $\boldsymbol{б}_1$=(1;1;1;1); $\boldsymbol{б}_2$=(1;1;1;-3); $\boldsymbol{б}_3$=(1;-2;1;0)

$\frac{b_1}{|b_1|}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\frac{b_2}{|b_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{12}};\frac{1}{\sqrt{12}};\frac{1}{\sqrt{12}};-\frac{3}{\sqrt{12}}\right)$, $\frac{b_3}{|b_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};0\right)$,

11. ВЕКТОР КЎРИНИШИДА ЁЗИЛГАН ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БИРГАЛИКДАЛИК ВА АНИҚЛИК ШАРТЛАРИ. ФУНДАМЕНТАЛ ЕЧИМЛАР

м та номаълумли *н* та чизиқли *бир жинсли тенгламалар системаси* вектор шаклда берилган бўлсин:

$\boldsymbol{a}_1 x_1+\boldsymbol{a}_2 x_2+\ldots+\boldsymbol{a}_м x_м=\theta$

ранг$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_м)=$*ранг*$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_м,\boldsymbol{б})$ бўлгани учун система ҳар доим *биргаликда*. *Ранг*$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_м)=м$ муносабат ўринли бўлса, система *аниқ* ва ягона нол йечимга ега.

Ранг$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_м)<м$ муносабат ўринли бўлса, система *аниқмас* **в**а йечимдан ташқари нолмас йечимларга ҳам ега бўлади. Ушбу ҳолда, ҳар бир нолмас йечим *м* ўлчовли вектор сифатида қаралиши мумкин.

Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг фундаментал йечимлари системаси ёки тизими деб, унинг чизиқли боғлиқ бўлмаган нолмас $\boldsymbol{\Phi}_1$, $\boldsymbol{\Phi}_2,\ldots,\boldsymbol{\Phi}_к$ йечимларига айтиладики**,** системанинг ҳар бир йечими ушбу йечимларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида аниқланиши мумкин.

Агар *ранг*$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_м)=р<м$ бўлса, система ўзининг фундаментал йечимлари тизими мавжудлиги билан ҳаректерланади ва тизим ҳар бир *м* ўлчовли *м-р* та нолмас векторлардан таркиб топади.

Бир жинсли системанинг фундаментал йечимлари тизими қуйидагича қурилади:

1. Бир жинсли системанинг умумий йечими қурилади;
2. *м-р* ўлчовли *м-р* та векторлардан иборат чизиқли еркли векторлар сиатемаси, масалан: $\boldsymbol{e}_1(1;0;\ldots;0)$, $\boldsymbol{e}_2(0;1;0;\ldots;0),\ldots$, $\boldsymbol{e}_{м\text{-}р}(0;0;\ldots;1)$ танланади;
3. Умумий йечим еркли номаълумлари ўрнига $\boldsymbol{e}_1$ вектор мос координаталарини қўйиб, базис номаълумлар аниқланади ва мос равишда $\boldsymbol{\Phi}_1$ фундаментал йечим қурилади. Шунингдек, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, …, $\boldsymbol{e}_{м\text{-}р}$ векторлардан

фойдаланиб, мос равишда $\boldsymbol{\Phi}_2$, $\boldsymbol{\Phi}_3$, ..., $\boldsymbol{\Phi}_{м-р}$ фундаментал йечимлар қурилади.

1. Мисол. Бир жинсли системанинг фундаментал йечимлари тизимидан бирини қуринг ва унинг умумий йечимини вектор шаклда аниқланг:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Системанинг умумий йечимини Гайсс-Жордан усулида қурамиз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1{,}2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4{,}6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$м$=4, $р$=2 бўлгани учун $м$-$р$=2 та чизиқли еркли $\boldsymbol{e}_1(1;0)$ ва $\boldsymbol{e}_2(0;1)$ системани танлаймиз. $\boldsymbol{e}_1(1;0)$ вектор координаталарини умумий йечимнинг мос еркли номалумлари ўрнига қўйиб, базис номалумларни аниқлаймиз ва $\boldsymbol{\Phi}_1(4{,}6;1{,}2;1;0)$ фундаментал ечимни қурамиз. $\boldsymbol{e}_2(0;1)$ вестор ёрдамида $\boldsymbol{\Phi}_2(1;-1;0;1)$ фундаментал йечимни қурамиз. Бошқача қилиб айтганда кенгайтирилган матрицадаги коеффицийентларни системага қўямиз:

$$\begin{cases} x_2 - 1{,}2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4{,}6x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 4{,}6x_3 + x_4 \\ x_2 = 1{,}2x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Фундаментал йечимлар $\boldsymbol{\Phi}_1(4{,}6;1{,}2;1;0)$ ва $\boldsymbol{\Phi}_2(1;-1;0;1)$ қурилади.

Умумий йечимни тузамиз:

$$\boldsymbol{X} = \lambda_1 \boldsymbol{\Phi}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\Phi}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4{,}6 \\ 1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Бу йерда λ_1 ва λ_2 лар ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

м та номалумли *н* та чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси вектор шаклда берилган бўлсин:

$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\ldots+\boldsymbol{a}_м x_м=\boldsymbol{б}$ $\quad(\boldsymbol{б}\neq 0)$

Системанинг умумий йечимини вектор шаклда ёзиш мумкин:

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}_0+\lambda_1\boldsymbol{\Phi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\Phi}_2+\ldots+\lambda_{m-r}\boldsymbol{\Phi}_{м\text{-}р}$

Бу йерда $\boldsymbol{\Phi}_0$ - бир жинслимас системанинг хусусий йечимларидан бири, $\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_{м\text{-}р}$ - берилган системага мос равишдаги

$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\ldots+\boldsymbol{a}_м x_м=\theta$

бир жинсли тенгламалар системасининг фундаментал йечимлари тизими, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$ -ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

2. Мисол. Берилган система умумий йечимини вектор шаклда қуринг:

$$\begin{cases}4x_1+7x_2+2x_3+3x_4=16\\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=3\\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4=2\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}4&7&2&3&|&16\\1&3&-1&2&|&3\\2&1&4&-1&|&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-5&6&-5&|&4\\1&3&-1&2&|&3\\0&-5&6&-5&|&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-1{,}2&1&|&-0{,}8\\1&0&-4{,}6&-1&|&5{,}4\\0&0&0&0&|&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\Phi}_0(5{,}4; -0{,}8; 0; 0)$ системанинг хусусий йечимларидан бирини қурдик.

Система умумий йечими вектор шаклини ёзамиз:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}_0+\lambda_1\boldsymbol{\Phi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\Phi}_2=\begin{pmatrix}5{,}4\\-0{,}8\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}4{,}6\\1{,}2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

бу йерда λ_1 ва λ_2 лар ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Мустақил ечиш учун масалалар:

Бир жинсли тенгламалар системасини йечинг:

1. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=0\\ -2x_1-4x_2+2x_3-2x_4=0\\ 3x_1+6x_2-3x_3-3x_4=0\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2-2x_3=0\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системаларининг умумий йечимини топинг:

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Системани йечинг:

10. $\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -3y - 4z = 0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

Системаларни фундаментал йечимларини ва умумий йечимини топинг:

14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18 \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Жавоблар:

1. (-2;1;0;0), ёки (1;0;1;0), ёки (1;0;0;1)
2. $(\frac{1}{2};\frac{3}{4};1)$
3. (0;0;0;0)
4. (8;-6;1;0), (-7;5;0;1)
5. $\boldsymbol{\Phi}_0(-11;-6;0;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1(11;7;1;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_2(5;3;0;1)$
6. $\boldsymbol{\Phi}_1=(-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{\Phi}_0=(0;0;0;1)$
7. $\boldsymbol{\Phi}_0=(\frac{13}{5};\frac{6}{5};0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1=(\frac{7}{5};-\frac{1}{5};1)$
8. $\boldsymbol{\Phi}_0=(1;\frac{7}{2};0;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1=(-\frac{5}{2};\frac{9}{2};1;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_2=(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0;1)$

10. $\boldsymbol{\Phi}_0=(0;0;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1=(-\frac{5}{7};\frac{11}{7};1)$
11. (0;0;0)
12. $\boldsymbol{\Phi}_1=(\frac{13}{2};\frac{7}{3};\frac{1}{2};1)$
13. $\boldsymbol{\Phi}_1=(8;-6;1;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_2=(13;-5;0;1)$
14. $\boldsymbol{\Phi}_0=(\frac{13}{3};-\frac{13}{3};\frac{1}{3};0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1=(\frac{49}{12};-\frac{25}{12};\frac{1}{3};1)$
15. $\boldsymbol{\Phi}_1=(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};1)$
16. $\boldsymbol{\Phi}_1=(0;1;1;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_2=(-\frac{3}{5};\frac{1}{5};0;1)$
17. $\boldsymbol{\Phi}_0=(-\frac{2}{7};-\frac{17}{7};0;0;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1=(-\frac{6}{7};-\frac{12}{7};1;0;0)$

    $\boldsymbol{\Phi}_2=(-\frac{9}{7};-\frac{12}{7};0;1;0)$, $\boldsymbol{\Phi}_3=(-\frac{19}{7};-\frac{23}{7};0;0;1)$
18. (-1;0;1) –ягона йечим.

12. ТЕКИСЛИКДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАРИ. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ. НУҚТАДАН ЧИЗИҚҚАЧА БЎЛГАН МАСОФА

1^0. *Текисликдаги* $A(x_1;\, y_1)$ ва $B(x_2;\, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$Д=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

2^0. Тенгликда *йўналтирилган кесманинг* ёки *боши* $A(x_1;y_1)$ ва *охири* $B(x_2;y_2)$ бўлган $\overline{AB}$ *векторнинг* координата ўқларидаги *пройекциялари:*

$$Пр_х\,\overline{AB}=X=x_2-x_1,\qquad Пр_у\,\overline{AB}=У=y_2-y_1 \qquad (2)$$

3^0. *Кесмани берилган нисбатта бўлиш:* $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталар берилган *АБ* кесмани *АН:НБ*$=\lambda$ нисбатда бўлувчи $Н(x;y)$ нуқтанинг координаталари ушбу:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_1}{1+\lambda} \qquad (3)$$

формулалар билан аниқланади. Хусусий ҳолда кесмани тенг иккига, яъни $\lambda=1:1=1$ нисбатда бўлганда

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4)$$

4^0. Учлари $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$, $C(x_3;\, y_3)$, ..., $Ф(x_n;\, y_n)$ нуқталарда бўлган *кўпбурчак юзи:*

$$С=\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right] \qquad (5)$$

га тенг.

5^0. *Тўғри чизиқнинг бурчак коеффициентли тенгламаси:*

$$y=кx+б \qquad (6)$$

к параметр тўғри чизиқнинг *Ох* ўққа оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг бўлиб ($к=тг\alpha$), тўғри чизиқнинг бурчак коэффиценти, баъзан қиялиги дейилади. *б* параметр бошланғич ордината ёки *Ой* ўқ ажратган кесма катталиги .

6^0. *Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси:*

$$Ax+Бx+C=0 \qquad (A^2+Б^2\neq 0) \qquad (7)$$

Хусусий ҳоллар:

а) C=0 бўлса, $й=-\frac{A}{B}x$ тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади;

б) $Б$=0 бўлса, $x=-\frac{C}{A}=a$ тўғри чизиқ 0х ўққа параллел бўлади;

с) A=0 бўлса, $й=-\frac{C}{B}=б$ тўғри чизиқ $0й$ ўққа параллел бўлади;

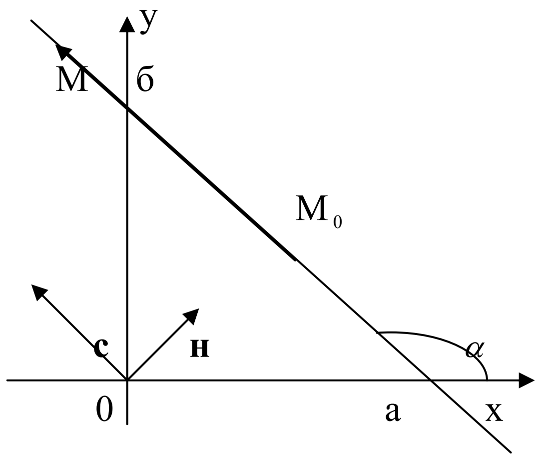
д) $Б=C$=0 бўлса, Ax=0 ёки x=0 - тўғри чизиқ $0й$ ўқдан иборат;

е) $A=C$=0 бўлса, $Бй$=0 ёки y=0 - тўғри чизиқ $0x$ ўқдан ўтади.

7^0. *Тўғри чизиқнинг ўқлардан ажратган кесмалари бўйича тенламаси*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (8)$$

Бу йерда *а* ва *б* - тўғри чизиқнинг ўқлардан кесган кесмаларининг катталиклари.



8^0. *Тўғри чизиқнинг вектор параметрли тенгламаси:*

$$\overline{M_0M}=ц \qquad (9)$$

Бу йерда *М(х;й)* тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси $\overline{M_0M}$ $(x-x_0;\ й-й_0)$ вектор ва **с***(м;н)* йўналтирувчи вектори ўзаро коллинеар, т-ихтиёрий ҳақиқий сон ёки параметр.

9^0. (9) тенгламани координаталарда

$$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \end{cases} \qquad (10)$$

ифодалаб, *тўғри чизиқнинг параметрли тенгламасини* ҳосил қилиш мумкин.

10^0. (10) тенгламаларда *m* параметр йўқотилса, тўғри чизиқнинг каноник тегламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (11)$$

11^0. Агар $|\bar{a}| = П$ $(П \geq 0)$, $\quad \nu = \frac{\bar{a}}{P} = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$ $\quad \bar{a}$ нормал радиус векторнинг бирлик вектори бўлиб, тўғри чизиқнинг ихтиёрий *M(x;й)* нуқтасининг мос радиус вектори $\bar{r}$(x;y) бўлса, у ҳолда $\bar{r}$ радиус векторнинг $\bar{a}$ ёки $\bar{\nu}$ векторидаги сонли пройекцияси *П* га тенг:

$$\Pi_{r_\nu}\bar{r} = П, \quad \text{ёки} \quad |\nu|\,\Pi_{r_\nu}\bar{r} = П, \quad \text{ёки} \quad (р\cdot в) = П\ (П \geq 0) \qquad (12)$$

Бу тенглама тўғри чизиқнинг *вектор кўринишдаги тенгламаси* дейилади.

(12) тенглама координаталарда

$$x\cos\alpha + й\cos\beta = П \quad \text{ёки} \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = П\ (П \geq 0) \qquad (13)$$

кўринишни олади. Бунда α - $\bar{a}$ ёки $\bar{\nu}$ векторнинг *Ox* ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчак катталиги. (13) шаклдаги тенглама тўғри чизиқнинг *нормал тенгламаси* дейилади.

12^0. (7) шаклдаги тенгламадан (13) шаклдаги тенгламага ўтиш учун умумий кўринишдаги тенглама нормалловчи кўпайтувчи деб аталадиган $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ сонга кўпайтирилади, бунда “+” ёки “–“ ишорадан *C* озод ҳад ишорасининг қарама–қаршиси танланади, акс ҳолда *П*= - μC ≥ 0 муносабат бажарилмайди.

Масала: *3x+4y-8=0* тенгламани нормал кўринишга келтиринг .

Берилган умумий шаклдаги тенглама учун нормалловчи кўпайтувчи

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}.$$

Тенгламани, $\mu=\frac{1}{5}$ га кўпайтирамиз, натижада тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишда нормал ҳолга келтирилади:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{8}{5}.$$

13^0. *й=к₁х+б₁* тўғри чизиқдан *й=к₂х+б₂* тўғри чизиққача соат стрелкасига қарши йўналишда ҳисобланувчи φ *бурчак*

$$тг\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\,k_2} \qquad (14)$$

формула билан аниқланади.

14^0. $A_1x+Б_1й+C_1=0$ ва $A_2x+Б_2й+C_2=0$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар учун (14) формула қуйидаги кўринишга ега бўлади:

$$тг\,\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2} \qquad (15)$$

ёки $$Cos\varphi=\frac{(n_1\cdot n_2)}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{A_1\,A_2+B_1B_2}{\sqrt{A^2{}_1+B_1{}^2}\bullet\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (16)$$

15^0. Тўғри чизиқнинг *параллеллик* шарти:

$$к_1=к_2 \quad \text{ёки} \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (17)$$

16^0. Тўғри чизиқнинг *перпендикулярлик* шарти:

$$к_1\bullet к_2=-1 \quad \text{ёки} \quad A_1A_2+Б_1Б_2=0 \qquad (18)$$

17^0. Берилган $A(x_1;y_1)$ нуқтадан ўтувчи *тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси:* $y-й_1=к(x-x_1)$ (19)

18^0. Берилган икки $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ *нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:* $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (20)$$

19^0. Параллел бўлмаган икки $A_1x+Б_1y+C_1=0$ ва $A_2x+Б_2y+C_2=0$ тўғри чизиқнинг *кесишиш нуқтасини* топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиш билан

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \tag{21}$$

ни ҳосил қиламиз.

20^0. $(x_0;y_0)$ *нуқтадан тўғри чизиққача бўлган* $д$ *масофани топиш учун* тўғри чизиқ нормал тенгламасининг чап томонидаги ўзгарувчи координаталар ўрнига $(x_0;y_0)$ координаталарни қўйиб, ҳосил бўлган соннинг абсолют қийматини оламиз, яъни

$$д=\left|x_0\cos\beta+y_0\sin\beta-P\right| \tag{22}$$

ёки $$д=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{23}$$

21^0. $Ax+Бy+C=0$ ва $A_1x+B_1y+C_1=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар *биссектриссаларининг* тенгламалари:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}} \tag{24}$$

22^0. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар *дастасининг тенгламаси:*

$$\alpha(Ax+By+C)+\beta(A_1x+B_1y+C_1)=0 \tag{25}$$

$\alpha=1$ деб олиш мумкин, у ҳолда биз (25) дастадан берилган тўғри чизиқлардан иккинчисини йўқатган бўламиз, яъни у вақтда (25) дан иккинчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қила олмаймиз.

Мустақил ечиш учун масалалар:

1. $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$ тўғри чизиқ берилган. Тўғ`ри чизиқнинг

а) умумий тенгламаси,

б) бурчак коеффициентли тенгламаси,

с) кесмаларга нисбатан тенгламасини ёзинг.

2. *4x+3y-36=0* тўғри чизиқ, координата ўқлари билан ҳосил қилган учбурчакнинг юзини топинг.

3. Тўғри чизиқ координата ўқларидан тенг кесмалар ажратади. Агар тўғри чизиқ координата ўқлари билан ҳосил қилган учбурчак юзи 8 *кв.бирл.* бўлса, тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

4. $A(2;5)$ нуқтадан ўтувчи ва ордината ўқида $б=7$ кесма ажратувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

5. Агар тўғри чизиқ координата ўқларидан тенг кесмалар ажраца ва тўғри чизиқни координата ўқлари орасидаги кесмаси $5\sqrt{2}$ га тенг бўлса, тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

6. $y=-2$, $y=4$ тўғри чизиқлар *3x-4y-5=0* тўғри чизиқни *А* ва *Б* нуқталарда кесиб ўтади. $\overline{AB}$ векторни узунлиги ва уни координата ўқларидаги пройекцияларини топинг.

7. Тўғи чизиқлар орасидаги бурчакни топинг:

1) $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-\ y+7=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ y=3x-4 \end{cases}$

8. *3x-2y+7=0,* *6x-4y-9=0,* *6x+4y-5=0,* *2x+3y-6=0* тўғри чизиқлар орасидан параллел ва перпендикуляр тўғри чизиқларни аниқланг.

9. *A(2;3)* нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасини ёзинг. Бу дастадан *Ox* ўқи билан 1) 45^0, 2) 60^0, 3) 135^0, 4) 0^0 бурчаклар ташкил етувчи тўғри чизиқни топинг.

10. *A(-2;5)* нуқта ва *2x-y=0* тўғри чизиқни ясанг. *А* нуқтадан ўтувчи ва

1) берилган тўғри чизиққа параллел

2) берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

11. $2x$-$5y$-10=0 тўғри чизиқни координата ўқлари билан кесишиш нуқталарига перпендикуляр қўйилган. Уларнинг тенгламасини ёзинг.
12. A(-1;3) ва B(4;-2) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.
13. Учлари A(-2;0), B(4;-2) ва C(4;2) бўлган учбурчакка *БД* баландлик ва *БЕ* медиана ўтказилган. *АС* томон, *БЕ* медиана ва *БД* баландлик тенгламаларини ёзинг.
14. Учбурчак томонлари қуйидаги тенгламалар билан берилган: $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$. Учбурчакни бурчаклари ва учларини топинг.
15. Квадрат томонларидан бирининг тенгламаси $x+3y-7=0$ ва диогоналлари кесишган нуқта *П*(0;-1) берилган. Квадратнинг қолган учта томон тенгламаларини ёзинг.
16. Ромб томонларидан бирининг тенгламаси $5x+2y-9=0$. Агар ромб диогоналлари $O(0;0)$ да кесишган бўлиб, улардан бирининг тенгламаси $y=2x$ бўлса, помбнинг қолган учта томон тенгламасини ёзинг.
17. Учбурчак томонларининг ўртаси берилган *П*(1;2) - *АБ* томонининг ўртаси, *Р*(-4;3) - *БС* томонининг ўртаси, *Қ*(5;-1) - *АС* томонининг ўртаси, *СФ* баландлик ва *АР* медиана кесишган нуқта топилсин.
18. Ромбнинг икки қарама-қарши учларининг координаталари берилган, A(1;-4) C(-1;3). Ромб диогоналларининг тенгламасини ёзинг.
19. Агар A(-5;5) ва B(3;1) учбурчакнинг учлари, *Д*(2;5) еса баландликлари кесишган нуқта бўлса, учбурчак томонларининг тенгламасини ёзинг.

20. $2x+2y-5=0$ тўғри чизиқ Ox ўқининг мусбат йўналиши билан қандай бурчак ҳосил қилади?

21. Oy ўқидан $б=1$ бирликка тенг кесма ажратувчи Ox ўқининг мусбат йўналиши билан $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

22. Координата бошидан ва $A(-2;-3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

23. $M(-3;-4)$ нуқтадан ўтувчи координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар тенгламасини ёзинг.

24. $O(0;0)$ ва $A(-3;0)$ нуқталар берилган OA кесмада параллелограмм ясалган, унинг диогоналлари $B(0;2)$ нуқтада кесишади. Параллелограмм томонлари ва диогоналлари тенгламасини ёзинг.

25. Томонлари 8 *см* ва 2 *см* бўлган тенг ёнли трапециянинг ўткир бурчаги 45^0. Трапециянинг катта асоси Ox ўқида ёца, Oy ўқи еса трапециянинг симметрия ўқи бўлса, трапециянинг томонлари тенгламасини ёзинг.

26. Агар тўғри чизиқ координата ўқлари билан ҳосил қилган учбурчак юзи 6 *кв.б.* бўлса ва тўғри чизиқ (-4;6) нуқтадан ўца, унинг тенгламасини ёзинг.

27. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг:

а) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 6x+4y+9=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y=0 \\ 8x+6y=11 \end{cases}$

28. Учлари $A(-2;0)$, $B(2;4)$ ва $C(4;0)$ бўлган учбурчак берилган. Учбурчак томонлари, AE медианаси, $БД$ баландлик тенгламаларини, AE медиана узунлигини топинг.

29. Томонлари $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$ тенгламалар билан берилган учбурчакни бурчаклари, учлари ва учбурчакни юзини топинг.

30. Координаталар бошидан $2x+y=a$ тўғри чизиқ билан тенг ёнли учбурчак ҳосил қилувчи икки ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Шу учбурчакнинг юзини топинг.

Кўрсатма: $2x+y=3$ *билан* $y=kx$ *ва* $y=-\frac{x}{k}$ *тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари* M *ва* H *нинг координаталарини топгандан сўнг* $OM=OH$ *тенгликдан* k *ни топиш керак.*

31. Учбурчак $AБ$ томонининг тенгламаси $x-3y+3=0$ ва AC томонининг тенгламаси $x+3y+3=0$ ҳамда $AД$ баландлигининг асоси $Д(-1;3)$ берилган бўлса, учбурчакнинг икки бурчаклари топилсин.

32. Ромб икки томонининг тенгламалари $x+2y=4$ ва $x+2y=10$ ҳамда диогоналларидан бирининг тенгламаси $y=x+2$ маълум бўлса, ромб учларининг координаталари ҳисоблансин.

Жавоблар:

1. а) $x+2y-2\sqrt{5}=0$ б) $-\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$ с) $\frac{x}{2\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}=1$

2. 54 *км. бирлик.*

3. $x+y-4=0$

4. $x+y-7=0$

5. $x+y-5=0$ $x+y+5=0$

6. $|AB|=10$ $\Pr_{ox} AB=8$ $\Pr_{oy} AB=6$

7. 1) $арстг\frac{3}{4}$ 2) 45^0 3) 45^0

10. $y=2x+9$ $y=-\frac{1}{2}x+4$

11. $5x+2y+(-4)=0$ $5x+2y=25$

12. $x+y-2=0$

13. AC: $x-3y+2=0;$ $БД$: $3x+y=12;$ $БE$: $x+y-2=0$

14. (3;-1), (3;3), $\left(-\frac{9}{5};\frac{3}{5}\right)$, 45^0, $71^0 31$, $63^0 24$

20. 135^0

21. $\sqrt{3x}+y-1=0$

22. $3x+2y=0$

23. $x+3=0,$ $y+4=0$

24. $y=0,$ $4x-3y=0,$ $4x-3y+12=0,$ $y=4$

25. $x+y-4=0, \quad x-y+4=0, \quad y=3, \quad y=0$

26. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1, \quad \frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1$

27. а) 0^0, б)90^0

28. AE: $2x-5y=-4$, $AД$: $x-2y=-2$ $\left|\overline{AE}\right|=\sqrt{29}$

29. $тгA=\frac{4}{3}$ $тгБ=тгC=2$. $C=16$ *кв.бирлик*

30. $\frac{a^2}{5}$ *кв.бирлик*

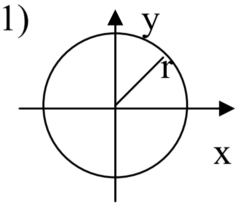
31. $A=36^0 52ъ$ $Б=128^0 52ъ$

32. (0; 2), (4; 0) (2; 4), (-2; 6).

13. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЕГРИ ЧИЗИҚЛАР

1^0. Маркази координата бошида, радиуси *Р* бўлган *айлана* тенгламаси(1-расм):

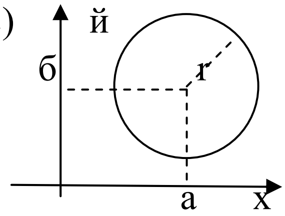
$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$



1- расм.

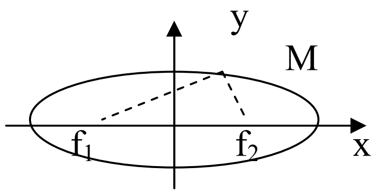
2^0. Маркази *(а;б)* нуқтада, радиуси *Р* бўлган *айлана* тенгламаси (2-расм):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2)$$



2-расм.

3^0. ***Еллипс*** (3-расм):



3-расм.

Фокус деб аталувчи $f_1(-c;0)$ ва $f_2(c;0)$ нуқталардан $|f_1M|+|f_2M|=2a$ масофага тенг ихтиёрий $M(x;y)$ нуқталар тўплами еллипс дейелади. f_1M ва f_2M кесмалар *фокал радиуслар* дейилади, ҳамда

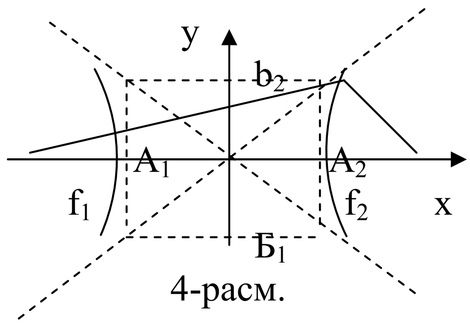
$$|f_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$|f_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (3)$$

га тенг. Еллипснинг *каноник тенгламаси*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

бунда $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Еллипснинг *кичик ярим ўқи а*, *катта ярим ўқи б*. *Маркази* еса $O(0;0)$ – координата боши. Еллипснинг *учлари (-а;0), (а;0),* *(0;-б), (0;б)*. Еллипснинг *симметрия маркази O(0;0)*, *симметрия ўқлари Ох, Ой* ўқлар. Еллипснинг *ексцентриситети* $\varepsilon = \frac{a}{c} < 1$ га айтилади.

4^0. ***Гипербола*** (4-расм):



4-расм.

Фокуслар Φ_1(-c;0) ва *Φ_2(c;0)* гача бўлган масофалар айирмаси.

$$\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a$$

га тенг ихтиёрий *M(x;й)* нуқталар тўпламига *гипербола* дейилади.

Каноник тенгламаси:

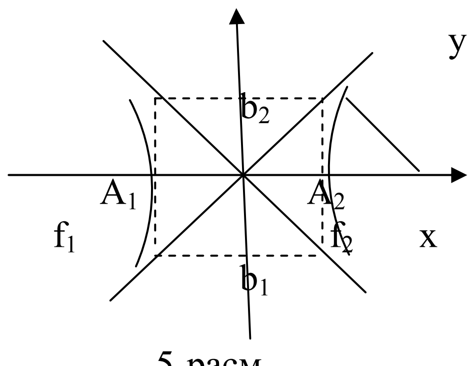
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

бунда $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. *Ҳақиқий учлари*: *A_1(-а;0), A_2(а;0); мавҳум учлари:$Б_1$(0;-б), $Б_2$(0;б)*. Гиперболанинг асимтоталари: $y = \frac{b}{a}x$ (I ва III чораклардан ўтади) ва

$y = -\frac{b}{a}x$ (II ва IV чораклардан ўтади).

Ярим ўқлари тенг, яъни $a = b$ гиперболага *тенг томонли гипербола* дейилади (5-расм) ва $x^2 - y^2 = a^2$ кўринишида ифодаланади.

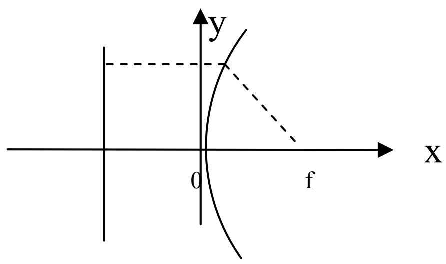
Екстрисентриситети: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$



5-расм.

5^0. ***Парабола*** (6-расм): *Фокуси* $Ф(\frac{p}{2};0)$ дан ва *директрисаси* $x=-\frac{p}{2}$ тўғри чизиғигача тенг масофада ётувчи ихтиёрий *М(х;й)* нуқталар тўпламига *парабола* дейилади. Параболанинг *каноник тенгламаси:*

$$y^2=2px \qquad (6)$$



6-расм.

Параболанинг учи координата боши *О(0;0). Фокусдан директриса* тўғри чизиғигача бўлган масофа *п* га тенг.

Мустақил ечиш учун масалалар:

1. *А(-4;6)* нуқта берилган. Диаметри *ОА* кесма бўлган айлана тенгламасини тузинг.
2. *А(-6;0)* нуқтадан ўтувчи ва *Оу* ўқига координаталар бошида уринувчи айлана тенгламасини тузинг.
3. $x^2+y^2+4x-6y=0$ айлананинг *Оу* ўқи билан кесишган нуқталарига ўтказилган радиуслари орасидаги бурчак топилсин.
4. *А (-1;3), Б (0;2)* ва *С (1;-1)* нуқталардан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин. *Кўрсатма*: Изланаётган айлананинг тенгламасини $x^2+y^2+мx+ny+n=0$ кўринишида ёзиб, ундаги *х* ва *й* лар ўрнига берилган ҳар бир нуқтанинг координаталарини қўйгандан сўнг *м, н* ва *п* ларни топиш керак.
5. *А(4;4)* нуқтадан ва $x^2+y^2+4x-4y=0$ айлана билан у=-*х* тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

Еллипс.

6. Катта ўқи 8 ва кичик ўқи 6 бўлган еллипснинг тенгламасини тузинг.

Еллипс тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ дан масалани шартига кўра топамиз.

2а=8, 2б=6; яъни *а=4, б=3*. Буларни еллипс тенгламасига қўямиз.

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

7. $4x^2+9y^2=36$ еллипс тенгламасидан унинг ўқлари, фокуслари ва ексцентриситетини топинг.

$4x^2+9y^2=36$

Тенгламани иккала томонини 36 га бўламиз. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $a^2=9;$ $a=+3$;

$б^2=4;$ $б=+2;$ $c^2=a^2-б^2$ дан $c^2=9-4=5;$ $c=+\sqrt{5};$ $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Демак, *2а=6; 2б=4;*

$Ф_1\ (\sqrt{5},0);$ $Ф_2\ (-\sqrt{5},0);$ $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}\prec 1$

8. Катта ярим ўқи *а=5* ва *С* параметри

1) 4.8; 2) 4; 3) 3; 4)1.4; 5) 0

Берилган еллипсни каноник тенгламасини ёзинг. Ҳар бир еллипсни чизинг ва уларнинг ексцентриситетини топинг.

9. Йер фокусларидан бирида Қуёш жойлашган еллипс бўйича ҳаракат қилади. Қуёшдан Йергача бўлган енг кичик масофа тахминан 147.5 *миллион км* га, енг катта масофа 152.5 *миллион км* га тенг бўлса, Йер орбитасининг катта ярим ўқи ва ексцентриситети топилсин.

10. Ексцентриситети $\varepsilon=\frac{3}{4}$ бўлган ва $M=(-4;\sqrt{21})$ нуқтадан ўтувчи еллипс тенгламасини ёзинг ва *М* нуқтанинг фокал радиус-векторларини топинг.

11. Координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган еллипс $M\ (2;\sqrt{3})$ ва *Б (0;2)* нуқталаридан ўтади. Унинг тенгламаси ёзилсин ва *М* нуқтадан фокусларигача бўлаган масофа топилсин.

12. $9x^2+ 25y^2=225$ еллипсда шундай $M (x;y)$ нуқта топилсинки, ундан ўнг фокусгача бўлган масофа чап фокусгача бўлган масофадан 4 марта катта бўлсин.
13. Агар еллипснинг фокуслари орасидаги масофа унинг катта ва кичик ярим ўқларининг учлари орасидаги масофага тенг бўлса, унинг ексцентриситети топилсин.

Гипербола.

14. Фокуслари орасидаги масофа $2\sqrt{11}$ бўлиб, ўзи (9;-4) нуқтадан ўтган гипербола тенгламасини тузинг.

Шартга асосан $2c=2\sqrt{11}$, бундан $c=\sqrt{11}$. Гипербола (9;-4) нуқтадан ўтганлиги учун бу нуқта гипербола тенгламасини қаноатлантиради, яъни

$$\frac{9^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1$$

$81b^2-16a^2=a^{2b2}$

$a^2+b^2=c^2=11$ буни еллипс тенгламасига қўямиз.

$81b^2-16(11-б^2)=(11-b^2)b^2$

$b^4-86б^2-176=0$

$b_1^2=2;\ \ b_2^2=-83$

$a^2=11-b^2=9$

Демак, гипербола тенгламаси қуйидагича бўлади: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$

15. $16x^2-2y^2=400$ гипербола тенгламаси берилган. Унинг ўқлари, фокуслари, ексцентриситетини топинг ва асимптотасинининг тенгламасини тузинг.
16. Гиперболанинг ексцентриситети $\sqrt{2}$ га тенг ва $M (2a;\ a\sqrt{3})$ нуқтадан ўтади. Гиперболани содда тегламасини тузинг.

17. Гиперболани фокуслари $\Phi_1(-\sqrt{7};0)$ ва Φ_2 $(\sqrt{7};0)$ нуқталарда жойлашган. Агар Гипербола $A(2;0)$ нуқтадан ўца, унинг асимптоталари тенгламасини тузинг.

18. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг фокусидан асимптоталаригача бўлган масофалар ва асимптоталари орасидаги бурчак топилсин.

19. Бирор учидан фокусларигача бўлган масофалари 9 ва 1 га тенг бўлган гиперболанинг каноник тенгламаси ёзилсин.

20. $M\left(6;\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ нуқтадан ўтувчи, координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи $a=4$. Гиперболанинг чап фокусидан асимптоталарига туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

Парабола.

21. Парабола (3;5) нуқтадан ўтади. Унинг каноник тенгламасини ёзинг.

Парабола (3;5) нуқтадан ўтганлиги учун тенгламасини қаноатлантиради.

$y^2=2px$ $\quad x=3 \quad y=5$

$25=2\cdot p\cdot 3 \quad 25=6n \quad p=\frac{25}{6}$

Демак, $y^2=2\cdot\frac{25}{6}x$ $\quad y^2=\frac{25}{3}x$ - параболанинг каноник тенгламаси.

22. 1) (0;0) ва (1;-3) нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа нисбатан симметрик;

2) (0;0) ва (2;-4) нуқталардан ўтувчи ва *Ой* ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламаси ёзилсин.

23. Агар парабола $x=y$ тўғри чизиқ ва $x^2+6x+y^2=0$ айлананинг кесишиш нуқталаридан ўца, унинг тенгламаси ва директрисасини ёзинг.

24. $y^2 = 6x$ параболада фокал радиус вектор 4.5 га тенг бўлган нуқтани топинг.

25. *A(-1;3), B(0;2)* ва *C(1;-1)* нуқталардан ўтувчи айлана тенгламасини ёзинг.

26. Еллипс $M(2\sqrt{3};\sqrt{6})$ ва *A(6;0)* нуталардан ўтади. Унинг тенгламасини, ексцентриситети ва *M* нуқтадан фокусларгача бўлган масофани ёзинг.

27. $x^2+4y^2=4$ еллипснинг, маркази шу еллипснинг "юқори" учида бўлган ва унинг фокусларидан ўтувчи айлана билан умумий нуқталари топилсин.

28. $y^2=a^2+x^2$ гипербола фокуслари координаталарини ва асимптоталари орасидаги бурчакни топинг.

29. Учлари $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ еллипснинг фокусларида, фокуслари еса унинг учларида бўлган гипербола тенгламасини ёзинг.

30. 1) (0;0) ва (-1;2) нуқталардан ўтувчи ва *Ox* ўқига симметрик.

2) (0;0) ва (2;4) нуқталардан ўтувчи ва *Oy* ўқига симметрик бўлган парабола тенгламасини ёзинг.

31. Маркази $y^2 = 2px$ параболанинг фокусида бўлиб, парабола директрисасига уринувчи айлана тенгламаси ёзилсин. Парабола ва айлананинг кесишган нуқталари топилсин.

Жавоблар:

1. $x^2+y^2+4x-6y=0$ 2. $x^2+y^2+6x=0$

3. tgα = -2,4; α =$112^0 37$\` 4. $(x+4)^2+(y+1)^2=25$

5. $x^2+y^2-8y=0$

8. *b*=1,4; 3; 4; 4,8; 5 ε=0,96; 0,8; 0,6; 0,28; 0

9. *a*=150 *млн. кв.* $\varepsilon=\frac{1}{60}$ 10. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$; $p_1=11$; $p_2=5$

11. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $p_1=4-\sqrt{3}$; $p_2=4+\sqrt{3}$;

12. $\left(-\frac{15}{4};\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$ 13. $\sqrt{0,4}$

15. $x^2-y^2=4$ 16. $x^2-y^2=a^2$

18. b; $2arctg\frac{b}{a}$

19. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ($yoki$ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$)

20. $y=\pm\frac{4}{3}(x+5)$

22. 1) $y^2=9x$; 2) $y=-x^2$

23. $y^2=-3x$

24. $\left(3;\pm3\sqrt{2}\right)$ *Кўрсатма: изланаётган айлананинг тенгламасини $x^2+й^2+мx+нй+n=0$ кўринишда ёзиб олиш керак.*

25. $(x+4)^2+(y+1)^2=25$

26. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $p_1=3$; $p_2=9$;

27. $\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$

28. $\left(0;\pm a\sqrt{2}\right)$; 90^0

29. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

30. 1) $y^2=-4x$; 2) $y=x^2$

31. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=p^2$; $\left(\frac{p}{2};\pm p\right)$

14. ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

1^0. Уч ўлчовли *Oxyz* координаталар системасида берилган текислик тенгламаси: *Ax+By+Cz+D=0* $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ (1)

$\overline{N}$ *(A; B; C)* текисликка перпендикуляр бўлган *нормал вектор* дейилади.

2^0. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *нуқтадан ўтувчи* ва $\overline{N}(A;B;C)$ векторга перпендикуляр *текислик тенгламаси*:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (2)$$

3^0. *Ax+Бy+Cz+D=0* тенгламанинг махсус ҳоллари:

1) *Д*=0 бўлганда, *Ax+By+Cz=0* текислик координаталар бошидан ўтади;

2) *C*=0 бўлганда, *Ax+By+=D=0* текислик *Оз* ўқига параллел;

3) *C=Д*=0 бўлганда, *Ax+By=0* текислик *Оз* ўқидан ўтади;

4) *Б=C*=0 бўлганда, *Ax+D*=0 текислик *йОз* текисликка параллел;

5) Координата текисликларининг тенгламалари: *х*=0, *й*=0 ва *з*=0.

4^0. *Текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалар бўйича тенгламаси*: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (3)

5^0. *Икки текислик орасидаги бурчак*:

$$Cos\alpha=\pm\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\bullet\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{(\overline{N}\bullet\overline{N}_1)}{|\overline{N}|\bullet|\overline{N}_1|} \qquad (4)$$

формуладан топилади, бунда $\overline{N}$ ва $\overline{N}_1$ мос равишда *Ax+By+Cz+D=0* ва $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ текисликларга нормал векторлар.

Параллеллик шарти: $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$ (5)

Перпендикулярлик шарти: $AA_1+BB_1+CC_1=0$ (6)

6^0. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *нуқтадан* ўтувчи *Ax+By+Cz+D=0* *текисликкача* бўлган *масофа*: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (7)

7^0. Берилган икки текисликнинг *кесишган чизиғидан* ўтувчи барча *текисликлар дастасининг тенгламаси* қуйидагича ёзилади:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D) = 0 \qquad (8)$$

8^0. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган *учта* $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$ ва $(x_3;y_3;z_3)$ *нуқтадан ўтувчи текислик тенгламалари*:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Мустақил ечиш учун масалалар:

1. $M_1(0;-1;3)$ ва $M_2(1;3;5)$ нуқталар берилган, M_1 нуқтадан ўтувчи ва ***Н***$=\overline{M_1}\overline{M_2}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин.
2. $M(a;a;0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\overline{OM}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин.
3. $A(a;-\frac{a}{2};a)$ ва $B(0;\frac{a}{2};0)$ нуқтадан тенг узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.
4. $M_1(0;1;3)$ ва $M_2(2;4;5)$ нуқталардан ўтувчи ва *Ox* ўққа параллел текислик тенгламаси ёзилсин.
5. *Ox* ўқдан ва $M(0;-2;3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин.
6. *Oz* ўқдан ва $M(2;-4;3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин.
7. *Oy* ўққа параллел, *Ox* ва *Oz* ўқлардан *a* ва *c* кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.
8. $M(2;-1;3)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.
9. $M(-4;0;4)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда *Ox* ва *Oy* ўқларидан *a*=4 ва *б*=3 кесмалар ажратувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

10. 1) x-$2y$+$2з$-$8=0$ ва x+$з$-$6=0$

2) $x+2z-6=0$ ва $x+2y-4=0$

текисликлар орасидаги бурчак топилсин.

11. $(2; 2; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва x-$2y$-$3з=0$ текисликка параллел текислик топилсин.

12. $(-1; -1; 2)$ нуқтадан ўтувчи ва x-$2y$+$з$-$4=0$ ҳамда $x+2y-2z+4=0$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

13. $M(-1;2;3)$ нуқтадан OM га перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин.

14. *Ой* ўқдан ва $(4; 0; 3)$ нуқтадан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

15. *Оз* ўққа параллел ҳамда $M_1(2;2;0)$ ва $M_2(4;0;0)$ нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

16. $M(1;-3;5)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда Oy ва Oz ўқлардан Ox ўқдагидан кўра икки марта катта кесма ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

17. $(0;0;a)$ нуқтадан ўтувчи ва $x-y-z=0$ ҳамда $2y=x$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

18. $M_1(-1;-2;0)$ ва $M_2(1;1;2)$ нуқталардан ўтувчи ҳамда $x+2y+2z-4=0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

19. $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;1;2)$ ва $M_3(1;1;4)$ нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

20. Oz ўқдан $2x+y-\sqrt{5}z=0$ текислик билан 60^0 бурчак ташкил етувчи текислик тенгламаси тузилсин.

21. $(5;1;-1)$ нуқтадан $x-2y-2z+4=0$ текисликкача бўлган масофа топилсин.

22. $(4;3;0)$ нуқтадан $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ ва $M_3(3;0;1)$ нуқталардан ўтувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

23. $4x+3y-5z-8=0$ ва $4x+3y-5z+12=0$ параллел текисликлар орасидаги масофа топилсин. *Кўрсатма. Биринчи текисликда иҳтиёрий, масалан*

(2;0;0) нуқта олиб, ундан иккинчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

24. $2x-y+3z-9=0$; $x+2y+2z-3=0$; $3x+y-4z+6=0$ текисликларнинг кесишган нуқтаси топилсин.

25. (2;-1;1) нуқтадан ўтувчи ҳамда $3x+2y-z+4=0$ ва $x+y+z-3=0$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

Жавоблар:

1. *х+4й-2з=2*	2. *х+й=2а*
3. *х-й+з=а*	4. *2й-3з+7=0*
5. *3й+3з=0*	6. *2х+й=0*
7. $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$	8. *х+й+з=4*
9. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$	10. 1) 45^0; 2)78^030`
11. *х-2й-3з=4*	12. *2х+3й+4з=3*
13. *х-2й-3з+14=0*	14. *3х-4з=0*
15. *х+й=4*	16. $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$
17. *2х+й+з=а*	18. *2х-2й+з=2*
19. *2х-й+з=5*	20. *3х-й=0* ва *х+3й=0*
21. 3	22. $\sqrt{6}$
23. $2\sqrt{2}$	24. (1;-1;2)
25. *3х-4й+з=11*	

15. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

1^0. *A(a;b;c)* нуқтадан ўтувчи ва ***П****(м;n;p)* векторга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламалари. *H(x;y;z)*-тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ (1)

Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг *каноник* тенгламалари дейилади. ***П****(м;n;p)* вектор тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

2^0. (1) тенгламадаги ҳар бир нисбатни m параметрга тенглаб, тўғри чизиқнинг

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = pt + c \end{cases} \qquad (2)$$

кўринишдаги *параметрик тенгламаларига* ега бўламиз.

3^0. Икки нуқта $(x_1;y_1;z_1)$ ва $(x_2;y_2;z_2)$ дан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

4^0. Тўғри чизиқнинг *умумий тенгламалари*:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

5^0. *Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак*

$$Cos\varphi = \frac{m\bullet m_1 + n\bullet n_1 + p\bullet p_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\bullet\sqrt{m_1^{\;2}+n_1^{\;2}+p_1^{\;2}}} \qquad (5)$$

6^0. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ *тўғри чизиқ билан Ax+By+Cz+D=0 текислик орасидаги бурчак*

$$Sin\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\bullet\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (6)$$

Параллеллик шарти: *Ам+Bn+Cp=0* (7)

Перпендикулярлик шарти: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ (8)

7^0. *Текислик билан тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси* (2) кўринишидаги тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари текисликнинг $Ax+By+Cz+D=0$ тенгламасидаги x, y, z ларнинг t га нисбатан ёзилган қийматларини қўямиз. Ҳосил бўлган тенгламадан m_0 ни, сўнгра кесишган нуқта координаталари x_0, $й_0$, $з_0$ ни топамиз.

8^0. *Икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётиш шарти:*

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Мустақил ечиш учун масалалар:

1. $x=4$, $y=3$ тўғри чизиқ ясалсин ва унинг йўналтирувчи вектори топилсин.

2. 1) $\begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=2 \\ z=x+1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=4 \\ z=y \end{cases}$

Тўғри чизиқлар ясалсин ва уларнинг йўналтирувчи векторлари аниқлансин.

3. $A(-1;\ 2;\ 3)$ ва В$(2;\ 6;\ -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин ва унинг йўналтирувчи косинуслари топилсин.

4. $A(2;\ -1;\ 3)$ ва В$(2;\ 3;\ 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

5. 1) $(-2;\ 1;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи ва $P(1;\ -2;\ 3)$ векторга параллел бўлган;

2) $A(3;\ -1;\ 4)$ ва $B(1;\ 1;\ 2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламалари ёзилсин.

6. $й=3x-1$, $2з=-3x+2$ тўғри чизиқ билан $2x+й+з-4=0$ текислик орасидаги бурчак топилсин.

7. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$ тўғри чизиқ $2x+й-з=0$ текисликка параллел еканлиги, $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ тўғри чизиқ еса шу текислик устида ётиши кўрсатилсин.

8. *(-1; 2; -3)* нуқтадан ўтувчи ва *x=2, y-з=1* тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

9. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ тўғри чизиқдан ва *(3; 4; 0)* нуқтадан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

10. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ тўғри чизиқдан ўтувчи ва *2x+3y-z=4* текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

11. (*а; б; с*) нуқтадан ўтувчи ва: 1) *Оз* ўққа параллел; 2) *Оз* ўққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

12. $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=-2z+1 \end{cases}$ тўғри чизиқ билан *(1; -1; -1)* нуқта ва координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ орасидаги бурчак топилсин.

13. *(2; -3; 4)* нуқтадан *Oz* ўққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. Изланган тўғри чизиқ (0; 0; 4) нуқтадан ҳам ўтади.

14. *Н(2; -3; 4)* нуқтадан $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

Кўрсатма. А(-1; -2; 1) - тўғри чизиқдаги нуқта; $P(3;4;5)$*- тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори. У вақтда*

$$d = AN\sin\alpha = \frac{AN\left|P\bullet\overline{AN}\right|}{P\bullet AN} = \frac{\left|P\bullet\overline{AN}\right|}{P}$$

15. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$ ва $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа топилсин.

16. $\begin{cases} 2x+y+8z-16=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$ тўғри чизиқ тенгламалари:

1) пройекциялари бўйича; 2)каноник кўринишда ёзилсин. Тўғри чизиқнинг координаталар текисликларидаги излари топилсин, тўғри чизиқ ва унинг пройекциялари ясалсин.

17. *A(0; -4; 0)* нуқтадан ўтувчи ва $P(1;2;3)$ векторга параллел тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин; тўғри чизиқнинг *xOz* текислигидаги изи топилсин.

18. *x*=3, *з*=5 тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори топилсин.

19. *(2; -3; 4)* нуқтадан *Oy* ўққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

20. $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \quad va \quad \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

21. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ ва $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

22. *x=2m-1, y=m+2, з=1-m* тўғри чизиқнинг *3x-2y+з=3* текислик билан кесишган нуқтаси топилсин.

23. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқнинг *x+2y+3z-29=0* текислик билан кесишган нуқтаси топилсин.

24. $\left.\begin{matrix} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{matrix}\right\}$ ва $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$

тўғри чизиқларнинг кесишувчи еканлиги кўрсатилсин ва улар ётган текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

25. *(2; 1; 0)* нуқтадан *x=3z-1; y=2z* тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

Жавоблар:

1. *П*(0;0;1)
2. 1) $\overline{P} = \bar{i}$ 2) $\overline{P} = \bar{i} + \bar{k}$ 3) $\overline{P} = \bar{j} + \bar{k}$
3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$: $Cos\alpha = 0{,}3\sqrt{2}$; $Cos\beta = 0{,}4\sqrt{2}$; $Cos\gamma = -0{,}5\sqrt{2}$
4. *x*=2; z=3

5. 1) $\begin{cases} x=-2+t \\ y=\ 1-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ 6. $Sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

7. Иккала тўғри чизиқ учун ҳам *Ам*+*Вn*+*Ср*=2•2+1•(-1)+(-1)•3=0, лекин биринчисининг (-1;-1;1) нуқтаси текисликда ётмайди, иккинчисининг (-1;-1;-3) нуқтаси еса текисликда ётади.

8. *й+з+1=0 (тўғри чизиқнинг тенгламаларини* $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ *кўринишда ёзиш мумкин).*

9. *х-2у+з+5=0*

10. *8х-5у+з-11=0*

11. 1) $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-b}{0}=\dfrac{z-c}{1}$, демак, $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$

2) *з=с* ва $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}$

12. $Cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

13. *3х+2й=0 з=4*

14. 0,3 $\sqrt{38}$

15. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

16. $\begin{cases} x=\ 6\ -3z \\ y=-2z+4 \end{cases}$ $\dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z}{1}$ излари: (6;4;0), (0;0;2)

17. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z}{3}$

18. *П(0;1;0)*

19. у=*-3; 2х-z=0*

20. Тенгламаларни каноник формага келтирамиз;

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-5}{2}$ ва $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{6}$; $Cos\varphi=\dfrac{20}{21}\approx 0{,}952;\ \ \varphi=17^0 48`$

21. *х+2у-2з=1*

22. (5; 5; -2)

23. (6; 4; 5)

24. *х+2у-5з=0*

25. $\dfrac{x-2}{-9}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z}{11}$

16. ЧИЗИҚЛИ ФАЗО. ЕВКЛИД ФАЗО. ОРТОГОНАЛ МАТРИЦА

1. $\boldsymbol{a}_1(0;\ 1;\ -3)$, $\boldsymbol{a}_2(3;\ 5;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_3(1;\ 2;\ -1)$ векторлар системаларига тортилган чизиқли қисм ости фазосининг базисларидан бирини, ўлчамини ҳамда ортонормалланган базисини топамиз:

Бунинг учун $\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3=\theta$ вектор тенглама умумий йечимини Гаусс-Жордан усулида қурамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_3 номаълумлар умумий йечимнинг базис номаълумлари. Демак, мос равишда, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ векторлар тизими берилган системанинг базисларидан бирини ташкил етади. Тизим 2 та вектордан таркиб топгани учун, берилган векторлар системасининг ўлчами 2 га тенг.

Базисни ташкил қилувчи $\boldsymbol{a}_1(0;\ 1;\ -3)$ ва $\boldsymbol{a}_3(1;\ 2;\ -1)$ векторларни ортогоналлаймиз:

$$b_1 = a_1(0;1;-3)$$

$$b_2 = a_3 \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = (1;2;-1) - \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-1)}{0\cdot 0 + 1\cdot 1 - 3\cdot(-3)}(0;1;-3) = (1;2;-1) - \frac{5}{10}(0;1;-3) = (1;\frac{3}{3};\frac{1}{2})$$

ҳосил бўлган ортогонал система векторларини бутун координатали векторларга айлантириб, $\boldsymbol{б}_1(0;\ 1;\ -3)$ ва $\boldsymbol{б}_2(2;\ 3;\ 1)$ ни оламиз. Бу ортогонал системанинг ҳар бир векторини бирлик кўринишга келтирамиз, яъни ортонормаллаштирамиз:

$$\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{(0;1;-3)}{\sqrt{0^2+1^2+(-3)^2}} = (0;\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}})$$

$$\frac{b_2}{|b_2|} = \frac{(2;3;1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

2. ***x(3; -2; 4)*** вектор e_1, e_2, e_3 базисда берилган. Векторнинг

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 - 3e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3' = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

базисдаги координаталарини топамиз:

Коеффициентлар матрицаси *П* нинг транспонирланган матрицаси P^T ни ҳосил қиламиз:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

У ҳолда ***x*** векторнинг дастлабки базисдаги координаталари унинг янги базисдаги координаталари орқали (матрица шаклида $x=П^T x`$) қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_2 = 2x_1' + x_2' - x_3' \\ x_3 = -3x_1' + x_2' + 2x_3' \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 19/12 \end{array}\right)$$

Демак, дастлаб берилган ***x(3; -2; 4)*** векторнинг янги базисдаги координаталари: $\boldsymbol{x}\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{12}; \frac{19}{12}\right)$

Таъриф: $P \cdot P^T = P \cdot P^{-1} = E$ шартни бажарувчи *П* матрицага ортогонал матрица дейилади.

3. Қуйидаги матрица ортогонал матрица бўлишини текширамиз :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\alpha & -Sin\alpha \\ 0 & Sin\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\alpha & Sin\alpha \\ 0 & -Sin\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$P \cdot P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Демак, берилган *П* матрица ортогонал матрица бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар:

Қуйидаги векторлар системаларига тортилган чизиқли қисм ости фазосининг базисларидан бирини , ўлчамини ва ортонормалланган базисини топинг:

4. $\boldsymbol{a}_1(3; -1; 2)$, $\boldsymbol{a}_2(1;4;-1)$, $\boldsymbol{a}_3(7;2;3)$

5. $\boldsymbol{x}(2;-1)$ вектор $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, базисда берилган . Векторнинг $\boldsymbol{e}_1$\`$=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$; $\boldsymbol{e}_2$\`$=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ базисдаги координаталарини топинг .

Қуйидаги матрицалардан ортогоналларини ажратинг:

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0.5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Қуйида берилган икки векторлар системаларидан ҳар бири базис бўла олишини исботланг. Ушбу базисларда берилган айнан бир векторнинг координаталари орасида муносабатларни ўрнатинг:

9. $\boldsymbol{e}_1(1;2)$, $\boldsymbol{e}_2(1;1)$;

$\boldsymbol{e}_1$\`$(1;1)$, $\boldsymbol{e}_2$\`$(3;4)$

10. P_3 да ***и, ж, к*** базисдан фазони *Оу* ордината ўқи атрофида α бурчакка бургандаги базисга ўтиш матрицасини қуринг.

Қуйидаги векторлар системаларига тортилган чизиқли қисм ости фазосининг базисларидан бирини , ўлчамини ва ортонормалланган базисини топинг:

11. $\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;3)$, $\boldsymbol{a}_2(0;3;4;1)$, $\boldsymbol{a}_3(-2;-1;6;-5)$, $\boldsymbol{a}_4(5;4;2;-4)$

12. $\boldsymbol{x}(3;-2)$ вектор $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ базисда берилган векторнинг $\boldsymbol{e}_1$\`$=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$; $\boldsymbol{e}_2$\`$=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ базисдаги координаталарини топинг .

13. $\boldsymbol{x}(1;2;-2)$ вектор $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ базисда берилган векторнинг $\boldsymbol{e}_1$\`$=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{e}_2$\`$=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ базисдаги координаталарини топинг .

Қуйидаги матрицалардан ортогоналларини ажратинг:

14. $\begin{pmatrix} Sin\alpha & 0 & Cos\alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -Cos\alpha & 0 & Sin\alpha \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} tg\alpha & tg\alpha \\ -ctg\alpha & ctg\alpha \end{pmatrix}$

Қуйида берилган икки векторлар системаларидан ҳар бири базис бўла олишини исботланг. Ушбу базисларда берилган айнан бир векторнинг координаталари орасида муносабатларни ўрнатинг:

16. ***e****$_1$(2;1;-1),* ***e****$_2$(3;1;2),* ***e****$_3$(1;0;4)*

e*$_1$`(1;1;-1),* ***e****$_2$`(2;3;-2),* ***e****$_3$`(3;4;-4)*

Жавоблар:

4. Базисларидан бири ***a****$_1$;* ***a****$_2$;* ўлчами 2;

$$\frac{b_1}{|b_1|}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}};-\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}}\right);\quad \frac{b_2}{|b_2|}=\left(\frac{5}{\sqrt{254}};\frac{15}{\sqrt{254}};-\frac{2}{\sqrt{254}}\right)$$

5. $x\left(-\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$

6. Ортогонал емас.

7. Ортогонал емас.

8. Ортогонал емас.

9. $\boldsymbol{e}_1` = \boldsymbol{e}_2$; $\boldsymbol{e}_2` = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$

10. $P=\begin{pmatrix} Cos\alpha & 0 & Sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ Sin\alpha & 0 & -Cos\alpha \end{pmatrix}$

11. Базисларидан бири ***a****$_1$,* ***a****$_2$,* ***a****$_4$*; ўлчами 3;

$$\frac{b_1}{|b_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{2}{\sqrt{15}};-\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$$

$$\frac{b_2}{|b_2|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{219}};\frac{7}{\sqrt{219}};\frac{13}{\sqrt{219}};0\right)$$

$$\frac{b_3}{|b_3|}=\left(\frac{15909}{|b_3|};\frac{18723}{|b_3|};\frac{15906}{|b_3|};-\frac{12483}{|b_3|}\right)\qquad |b_3|=\sqrt{1022473135}$$

12. $x\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$

13. $x\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};0\right)$

14. Ортогонал.

15. Ортогонал емас.

16. $\begin{cases} e_1^{`} = -3e_1 + 4e_2 - 3e_3 \\ e_2^{`} = 20e_1 - 17e_2 + 13e_3 \\ e_3^{`} = 24e_1 - 20e_2 + 15e_3 \end{cases}$

17. ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОР

1. Агар P^3да чизиқли $\widetilde{A}$ оператор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда ўзининг $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ матрицаси билан берилган бўлса, $x = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ векторнинг

у=*A(x)* аксини топинг.

Y=AX формулага биноан, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{bmatrix}$

Демак, $y = 10e_1 - 13e_2 - 18e_3$

2. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисда $\widetilde{A}$ оператор $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ матрицага ега.

$e_1 = e_1 - 2e_2, \quad e_2 = 2e_2 + e_2$ базисида $\widetilde{A}$ операторининг матрицасини топинг. Ўтиш матрицаси $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ нинг тескари матрисаси $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Демак, $B = C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

3. Чизқли $\widetilde{A}$ оператор $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ матрица билан берилган. Чизиқли операторнинг хос қийматлари ва хос векторларини топинг.

Характеристик тенглама тузамиз:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0; \quad \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 7$$

λ=-5 га тегишли $X^{(1)}=(X_1, X_2)$ хос векторни топамиз. Бунинг учун қуйидаги тенгламани ечамиз:

$\lambda=-5 \quad (A-\lambda E)\cdot x=0 \qquad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2=-1{,}5X_1$

агар $X_1=C$ деб олсак $X_2=-1.5C$, $X^{(1)}=(C;-1.5C)$ векторлар ҳар қандай $C\neq 0$ учун A операторини хос қиймати λ=5 га тегишли хос вектор бўлади. Ҳудди шундай λ_2=7 хос қиймати учун A операторни хос векторларни $X^{(2)}=\left(\frac{2}{3}C_1, C_1\right)$, $C_1\neq 0$ векторлар ташкил етади.

4. Чизиқли операторнинг $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасини диогонал кўринишига келтиринг.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ матриса билан берилган чизиқли операторнинг хос қийматлари ва хос векторлари 3-мисолда топилган: λ=-5 λ_2=7

$X^{(1)}=(C;1{,}5C)$; $X^{(2)}=\left(\frac{2}{3}C_1, C_1\right)$; $X^{(1)}$ *va* $X^{(2)}$ векторнинг координаталари пропорционал емас, шунинг учун $X^{(1)}$ ва $X^{(2)}$ векторлар чизиқли еркли. Демак, $X^{(1)}$ ва $X^{(2)}$ базисда A-матриканинг диагонал кўриниши:

$A^*=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *ёки* $A^*=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Буни текшириш учун базис векторлар сифатида $X^{(1)}=(2;\ -3)$, $X^{(2)}=(4;\ 6)$ векторларни олсак, янги базисга ўтказувчи ўтиш матрица C нинг кўриниш: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ бўлади. Диогонал матртиса:

$$A^*=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -30 & 20 \\ 21 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & 168 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Мустақил ечиш учун масалалар:

5. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисда чизиқли $\widetilde{A}$ оператор $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ матрица билан берилган, $x=4e_1-3e_2$ бўлса, y=$A(x)$ ни топинг.

6. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда чизиқли $\widetilde{A}$ оператор $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрица билан берилган $x=2e_1-4e_2-e_3$ бўлса, $y=A(x)$ ни топинг.

7. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисда $\widetilde{A}$ операторлар $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ матрицага эга.

$e_1^* = e_2 - 2e_1, \quad e_2^* = 2e_1 - 4e_2$ базисда $\widetilde{A}$ операторнинг матрицасини топинг.

Берилган матрицаларнинг хос қийматлари ва хос векторларини топинг:

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

11. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, базисдан $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$ базисга ўтиш матрисасини топинг.

12. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, e_4$ базисда $\widetilde{A}$ операторининг матрицаси

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ берилган. Ушбу операторнинг

1) $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, e_4$ базисдаги матрицасини топинг;

2) $e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_1 + e_2 + e_3 \cdot e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ базисдаги матрицасини топинг.

Ўзларининг матрицалари билан берилган чизиқли операторларнинг хос қийматлари ва хос векторларини топинг:

13. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 14. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; 16. $A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Чизиқли операторнинг $\widetilde{A}$ матрицасини диогонал кўринишига келтиринг:

18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 19. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

Жавоблар:

5. $6\overline{e}_1-19\overline{e}_2$ 6. $-4\overline{e}_1+7\overline{e}_2+7\overline{e}_3$

7. $\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

8. $(4c_1-c),\quad \lambda=1 \qquad (c_1-c_1),\quad \lambda=-2$

9. $(-2c,\, c,\, c),\quad \lambda_1=1,\ (0,\, c_1,\ c_1),\quad \lambda_2=3\quad (6c_2,-7c_2,5c_2),\ \lambda_3=-3$

10. $(c,\, c,\, -c),\quad \lambda=-1$ 11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

12. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

13. $\lambda=2,\ x=(c_1,\, 2c_1,\ c_2)$;

14. $\lambda_1=1,\quad x=(c,\, c,\, c);\quad \lambda_2=0\quad x=(c,\ 2c,\ 3c)$

15. $\lambda_1=1,\ x(3c,\ c,\ c)$;

16. $\lambda_1=1,\ x=(2c_1+c_2;\ c_1-c_2);\ \lambda_2=-1,\ x=(3c,\ 5c,\ 0)$

17. $\lambda_1 = 2,\ x = (0,\ c_1,\ 0)\quad \lambda_2 = -1,\ x(0,\ c_2,\ -c_2)$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

18. КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

1. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2$ квадратик форманинг A матрицасини тузинг.

Квадратик форманинг матрицасини топамиз:

$$L=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}4 & -6 & -5\\ -6 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}4 & -6 & -5\\ -6 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

2. $L(x_1, x_2) = 2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$ квадратик форма берилган.

$x_1=2y_1-3y_2;$ $x_2=y_1+y_2;$ чизиқли алмаштириш орқали ҳосил бўлган $L(y_1, y_2)$ квадратик формани топинг.

Берилган квадратик форманинг матрицаси $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ чизиқли алмаштириш матрицаси $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ бўлади.

Қидирилаётган квадратик форманинг матрицаси қуйидагича:

$$A^{\cdot}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -17\\ -17 & 3\end{pmatrix}$$

квадратик форманинг кўриниши:

$L(y_1, y_2)=13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2$

3. Квадратик формани – каноник кўринишга келтиринг:

$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2 = x_1^2-x_1(3x_2-4x_3)+2x_2x_3+x_3^2$

x_1 ўзгарувчининг квадрати ўрнида турган коеффицийенти нўлдан фарқли бўлгани учун, x_1 ўзгарувчининг тўлиқ квадратини топамиз:

$$L=\left[x_1-2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)+\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2$$

енди ўзгарувчи x_2 учун квадратини топамиз:

$$L=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2-\frac{16}{9}x_3\right)^2+\frac{37}{9}x_3^2,$$

Демак, нўлдан фарқли чизиқли алмаштириш

$$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3$$

$y_3=y_3$ берилган квадратик формани каноник кўринишга келтиради:

$$L(y_1,\ y_2,\ y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2$$

4. Квадратик форма $L=13x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$ мусбат аниқланган квадратик форма еканлигини исботланг:

Квадратик форманинг матрицаси $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ бўлади.

Характеристик тенглама тузамиз:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{ёки} \quad \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0$$

яъни $\lambda_1 = 14,$ $\lambda_2 = 4$ характеристик тенгламанинг йечимлари мусбат бўлгани учун, *Л*-мусбат аниқланган квадратик форма бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар:

5. Квадратик формани матрица кўринишида ёзинг:

$$L = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$$

6. Квадратик форманинг матрицасини топинг:

$$L(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

7. Квадратик форма $L(x_1,\ x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$, берилган.

$x_1=2y_1-y_2,$ $x_2=y_1-y_2,$ чизиқли алмаштириш орқали ҳосил бўлган квадратик формани топинг.

Квадратик формани қандай аниқланганлигини топинг:

8. $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$

9. $-2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$

10. $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$

11. $-x_1^2+2x_1x_2-4x_2^2$

12. $x_1^2+15x_2^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$

13. $12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2$

14. $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+8x_4^2+8x_2x_4$

Квадратик формани каноник кўринишга келтиринг:

15. $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$

16. $7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

17. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

18. $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

Жавоблар:

5. $L=(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2.5 \\ 1 & 4 & 0.5 \\ 2.5 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}$

7. $L = (y_1, y_2) = 19y_1^2 - 22y_1y_2 + 6y_2^2$

8. Мусбат аниқланган.

9. Манфий аниқланган.

10. Мусбат аниқланган.

11. Манфий аниқланган.

12. Умумий кўринишда.

13. Манфий аниқланган.

14. Мусбат аниқланган.

15. $4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$

16. $8y_1^2 + 8y_2^2 + 5y_3^2$

17. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

18. $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$

Адабиётлар

Асосий адабиётлар

1. С.В. Кремер тахрири остида “Высшая математика для экономистов”, М. “Высшая школа” 1998
2. Данко П.Е. ва бошқ. “Высшая математика в упражнениях и задачах” И, ИИ., М. “Высшая школа” 1998
3. Жўрайев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1995.
4. Латипов Х. ва бошқалар. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1995.
5. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988 ва кейинги нашрлар.
6. Замков О.О. ва бошқ. “Математические методы для экономистов” М. 1994.
7. Ражабов Ф., Нурметов А. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1990.
8. Саъдуллайев А. ва бошқалар. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. И. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1993.
9. Соатов У. Олий математика курси. ИИИ том. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1999.
10. Каримов М., Абдукаримов Р. Олий математика фанидан маъруза матнлари тўплами. И, ИИ қисм. Тошкент, ТМИ, 2002.
11. Адигамова Е.Б., Исайева Г., Муминова Р. Олий математикадан масалалар тўплами. – И, Тошкент, ТМИ, 2002.
12. Каримов М., Абдукаримов Р. Олий математика фанидан ўқув қўлланма. Тошкент, ТМИ, 2004.

Қўшимча адабиётлар

1. Бугров А.С., Николский С.М. “Элементы линейной алгевры и аналитической геометрии” М. “Наука”, 1989.
2. Вашенко Т.В. “Математика финансового менеджмента” М. “Проспектива”, 1996.
3. Кочович Е. “Финансовая математика” М. “Статистика”, 1994.
4. Масагйтова Р.В. “Математика для экономистов” Тошкент, “Ўқитувчи”, 1996.
5. Зайцев И.А. “Высшая математика” М. “Высшая школа” 1991.

6. “Справочник по математике для экономистов”, В.И. Йермакова тахрири остида, М. “Высшая школа” 1987.
7. Шипачов В.С. “Высшая математика” М. “Высшая школа” 1999.
8. Шодийев Т. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
9. Тожийев Ш. Олий математикадан масалалар ечиш. Т. “Ўзбекистон”, 2002.