O’zbekiston Respublikasi
Oliy va O’rta Maxsus Ta’lim
Vazirligi

Toshkent Moliya Instituti

«MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH»
fanidan
masalalar to’plami

Toshkent – 2003 y.

Tuzuvchilar: **prof. Q. Safaeva,**
dots. E. Mamurov,
kat.o'qit.Sh. Bobojonov,
assis. F. Shomansurova.

Taqrizchilar: **dots. X.Jumaev,**
dots. T. Adirov.

Toshkent moliya instituti ilmiy-uslubiy kengashi qarori asosida chop etildi.

So’zboshi

Mazkur masalalar to’plami iqtisodiy oliy o’quv yurtlarining bakalavriat yo’nalishidagi talabalari uchun «Matematik programmalash» fanidan tuzilgan namunaviy o’quv dasturlar asosida yaratilgan. Har bir o’tilgan nazariy ma’ruza mavzusini talabalar tomonidan amaliy jihatdan mustahkamlash maqsadida, to’plamga kiritilgan masalalar mavzular bo’yicha amaliy mashg’ulotlarga bo’lingan. Ko’pchilik mashg’ulotlarda shu mashg’ulot mavzusiga oid qisqacha nazariy ma’lumotlar va tipik masalalarning echish namunalari keltirilgan.

Taqdim etilayotgan masalalar to’plamidan amaliy mashg’ulot darslaridan tashqari, talabalarning mustaqil ta’lim jarayonlarida ham foydalanish mumkin. Qo’llanma bo’yicha bildirilgan taklif va fikr-mulohazalar uchun mualliflar oldindan o’z minnatdorchiliklarini bildirib qoladilar.

1- mashg'ulot

Chiziqli modellar.
Chiziqli programmalash masalalari.

1. Korxonada A, V va S mahsulotlarni tayyorlash uchun tokarlik, frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalaniladi. Har bir mahsulotning bir birligini tayyorlash uchun sarflanadigan vaqt normasi, har bir uskunaning umumiy ish vaqti fondi, hamda har bir turdagi birlik mahsulotni sotishdan olinadigan daromad ham 1- jadvalda keltirilgan.

1-jadvalda

Uskunalar	**Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt (stanok-soat)**			**Uskunaning umumiy ish vaqti fon-di (soat)**
	A	**V**	**S**	
Tokarlik	1	8	6	280
Frezerlik	2	4	5	120
Payvandlash	7	4	5	240
Silliqlovchi	4	6	7	360
Daromad (shartli birlik)	10	14	12	

Korxona mahsulotlarni sotishdan oladigan daromad eng ko'p bo'lishi uchun qaysi turdagi mahsulotdan qancha ishlab chiqarish kerakligini aniqlash talab qilinadi. Masalaning matematik modelini tuzing.

Echilishi: Aytaylik, korxona x_1 dona A, x_2 dona V va x_3 dona S mahsulot tayyorlashni rejalashtirgan bo'lsin. U holda, shuncha miqdordagi mahsulotni tayyorlash uchun $1x_1+8x_2+6x_3$ stanok-soat tokarlik uskunasining vaqti sarflanadi.

Tokarlik uskunasidan foydalanish vaqti jami 280 soatdan oshmasligi kerak, ya'ni

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280$$

tengsizlik bajarilishi lozim.

Xuddi shunga o'xshash mulohazalar bilan frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalanish vaqtiga nisbatan quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi.

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360$$

Tayyorlanadigan mahsulotlar soni manfiy bo'la olmaydi, shu sababli

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Shuningdek, agar x_1 birlik A, x_2 birlik V va x_3 birlik S mahsulot tayyorlansa, ularni sotishdan korxona oladigan jami daromad $F=10x_1+14x_2+12x_3$ shartli birlikni tashkil etadi.

Shunday qilib, quyidagi matematik masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \end{cases} \qquad (1)$$

sistemani qanoatlantiruvchi shunday

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \qquad (2)$$

noma'lumlarni topish kerakki, ular

$$F=10x_1+14x_2+12x_3 \qquad (3)$$

funktsiyaga maksimal qiymat bersin.

Yuqorida keltirilgan (1), (2) va (3) munosabatlar berilgan masalaning matematik modelini ifodalaydi.

2. Chorva mollarini to'yimli oziqlantirish uchun har chorva moli bir kunda A ozuqa moddasidan kamida 60 birlik, V ozyqadan kamida 50 birlik va S ozuqa moddasidan kamida 12 birlik qabul qilishi kerak. Ko'rsatilgan ozuqa moddalar 3 xil turdagi em mahsulotlari tarkibida mavjud. Har 1 kg em mahsuloti tarkibidagi ozyq moddalarning miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

Ozyq moddalar	**1kg em mahsuloti tarkibidagi ozyq moddalar miqdori**		
	I	II	III
A	1	3	4
V	2	4	2
S	1	4	3

Agar 1 kg I, II va III turdagi em mahsulotlarining bahosi mos ravishda 9, 12 va 10 shartli birlikdan iborat bo'lsa, bahosi eng arzon bo'lgan hamda zarur to'yimlilikka ega bo'lgan kunlik ratsion qanday bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Echilishi: Kunlik ratsion tarkibidagi I xil em miqdori x_1, II xiliniki x_2 va III xil em miqdori x_3 bo'lsin. U holda ratsionning zarur to'yimlilikka ega bo'lishi talabi quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 60 \quad , \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 50 \quad , \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 12 \quad , \end{cases}$$

O'z ma'nosiga ko'ra $x_1, x_2, x_3,$ noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni:

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Kunlik ratsionning umumiy bahosi esa

$$F= 9x_1+12x_2+10x_3$$

funktsiya bilan ifodalanadi.

Shunday qilib, qaralayotgan masalaning matematik modeli quyidagi munosabatlardan iboratdi:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3 \geq 60 \quad , \\ 2x_1+4x_2+2x_3 \geq 50 \quad , \\ x_1+4x_2+3x_3 \geq 12 \quad , \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \qquad (5)$$

$$F=9x_1+12x_2+10x_3 \rightarrow min. \qquad (6)$$

3. O'lchami 6x13 m^2 bo'lgan tunuka materiallarini shunday qirqish kerakki, unda ikki xildagi qirqimlar, ya'ni har biri 4x5 m^2 o'lchamli 400 ta, har biri 2x3 m^2 o'lchamli 800 ta qirqimlar hosil bo'lsin. Har bir tunukani qirqish usullari va bunda olinadigan turli o'lchamdagi qirqimlar soni quyidagi jadvalda berilgan.

Qirqimlar o'lchami (m^2)	**Tunukani qirqish usullari**			
	I	**II**	**III**	**IV**
4x5	3	2	1	0
2x3	1	6	9	13

Umumiy soni ko'rsatilgan miqdordan kam bo'lmagan va eng kam chiqindiga ega bo'lgan qirqimlar tayyorlash rejasini toping. Masalani matematik modelini tuzing.

Echilishi: Masalaning noma'lumlarini belgilaymiz:

x_1- I usulda, x_2- II usulda, x_3- III usulda va x_4- IV usulda qirqiladigan tunukalar soni bo'lsin. Unda, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

bo'lishi kerakligi ravshandir.

Agar bitta tunuka donasi I usulda qirqilsa, undan 6x13m^2- (3(4x5)+2x3)m^2=78m^2-66m^2=12m^2 chiqindi hosil bo'ladi. Shunga o'xshash, II usulda qirqilsa, 78m^2-(2(4x5)+6(2x3))m^2=78m^2-76m^2=2m^2 chiqindi, III usulda 78m^2-74m^2=4m^2 va IV usulda chiqindi hosil bo'lmaydi. Tunukalarni qirqishda hosil bo'ladigan jami chiqindilar miqdori $F=12x_1+2x_2+4x_3+0x_4$ yig'indidan iborat bo'lib, maqsadimiz uni minimallashtirishdir. Masalaning matematik modeli quyidagicha

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3 \geq 800 \quad , \\ x_1+6x_2+9x_3+13x_4 \geq 400 \quad , \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \qquad (8)$$

$$F=12x_1+2x_2+4x_3 \rightarrow min. \qquad (9)$$

Yuqorida ko'rsatilgan masalalarning matematik modellarida (1), (2), (4), (5), (7), (8) shartlar chegaraviy shartlar va (3), (6), (9) funktsiyalar esa maqsad funktsiyasi deb ataladi.

4. Deylik, A_1, A_2, A_3 xo'jaliklar V_1, V_2, V_3, V_4 punktlarni har kuni mos ravishda 40, 50, 30 tsentner sut bilan ta'minlashi kerak bo'lsin. Iste'molchi punktlarining mahsulotga bo'lgan bir kunlik talabi va 1 tsentner sutni iste'molchilarga etkazib berish uchun sarflanadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda berilgan.

Xo'jaliklar	**1ts. cutni tashish xarajatlari**				**Tashish uchun mo'ljallangan sut hajmi (ts)**
	V_1	V_2	V_3	V_4	
A_1	3	2,5	3,5	4	40
A_2	2	4,5	5	1	50
A_3	6	3,8	4,2	2,8	30
Iste'molchilar talabi (ts)	20	40	30	30	120

Xo'jaliklardan iste'molchilarga sut tashishning shunday rejasini topingki, bunda xo'jaliklardan barcha sut tashib ketilsin, iste'molchilarning talabi to'la qondirilsin, hamda jami tashish xarajatlari eng kam bo'lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Echilishi: Bu masalada x_{ij} –orqali i-xo'jalikdan j-iste'molchi punktga tashish rejalashtirilgan sut miqdorini belgilaymiz. Xo'jaliklardagi jami sut hajmi va iste'molchilarga zarur bo'lgan jami sut miqdori bir-biriga teng bo'lib, 120 tsentnerni tashkil etadi.

Demak, xo'jaliklardagi jami sut miqdori butunlay tashib ketilishi va iste'molchilarning talablari to'laligicha qondirilishi kerak bo'ladi. (10.1 va 10.2-munosabatlar)

Ma'nosiga ko'ra x_{ij} noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$x_{ij} \geq 0$ $(i=1,2,3;\ \ j=1,2,3,4)$.

Sutni tashishdagi jami transport xarajatlari

$$3x_{11} + 2{,}5x_{12} + 3{,}5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4{,}5x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3{,}8x_{32} + 4{,}2x_{33} + 2{,}8x_{34}$$

yig'indi bilan ifodalanadi. Shunday qilib, ushbu masalaning matematik modeli quyidagi munosabatlardan iboratdir:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30 \end{cases} \qquad (10.1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \end{cases} \qquad (10.2)$$

$$x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, ..., x_{34} \ge 0 \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} F = 3x_{11} + 2{,}5x_{12} + 3{,}5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4{,}5x_{22} + 5x_{23} + x_{24} \\ + 6x_{31} + 3{,}8x_{32} + 4{,}2x_{33} + 2{,}8x_{34} \to \min \end{aligned} \qquad (12)$$

Bu modeldagi (10.1) munosabat xo’jaliklardagi jami sut miqdori butunlay tashib ketilishni va (10.2) munosabat esa iste’molchilarning talablari to’la qondirilishini ifodalaydi.

Biz ba’zi sodda iqtisodiy masalalar matematik modellarining namunalari sifatida keltirgan yuqoridagi masalalarda chegaraviy

shartlar chiziqli tengsizlik yoki tenglamalar sistemasidan, hamda maqsad funktsiyalari ham chiziqli funktsiyalar bo’lganligi uchun ular chiziqli programmalash masalalari deb ataladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Qandolatchilik fabrikasi 3 turdagi A, V va S karamellarni ishlab chiqarish uchun 3 turdagi xom ashyodan, ya’ni shakar, meva qiyomi va shinnidan foydalanadi. Har bir turdagi karameldan 1 t ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) quyidagi jadvalda keltirilgan. Shuningdek, jadvalda fabrika ishlatishi mumkin bo’lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori va har bir turdagi karamelning 1 tonnasini sotishdan olinadigan daromad ham keltirilgan.

Xom ashyo turi	**1t. karamel uchun sarfla-nadigan xom ashyo normasi (t)**			**Xom ashyoning umumiy miq-dori (tonna)**
	A	**V**	**S**	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Shinni	0,4	0,4	0,3	600
Meva qiyomi	-	0,1	0,1	120
1t mahsulotni sotishdan kela-digan daromad (shartli birlik)	108	112	126	

Fabrikaning oladigan daromadini maksimallashtiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasi topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

2. Sutni qayta ishlash zavodi shisha idishlarda qadoqlangan sut, kefir, qaymoq ishlab chiqaradi. 1 tonnadan sut, kefir, qaymoq ishlab chiqarish uchun mos ravishda 1010 , 1010 va 9450 kg sut zarur bo’ladi. Bunda 1 tonna sut va kefir tayyorlashda mos ravishda 0,18 va 0,19 mashina-soat ish vaqti sarflanadi. 1 tonna qaymoq tayyorlash uchun maxsus avtomatlar 3,25 soat ishlaydi. Zavod sut mahsulotlarini ishlab chiqarish uchun hammasi bo’lib 136000 kg sut ishlatishi mumkin. Asosiy ishlab chiqarish jihozlari 21,4 mashina-soat, qaymoq quyish avtomatlari esa 16,25 soat ishlashi mumkin. 1 tonna sut, kefir va qaymoqni sotishdan olinadigan daromad mos ravishda 30, 22 va 136 birlikka teng. Zavod bir kunda 100 tonnadan kam bo’lmagan miqdorda shisha idishga qadoqlangan sut ishlab chiqarishi kerak. Mahsulotning boshqa tur-

lari uchun chegaralar yo’q. Zavod har kuni mahsulotni qanday miqdorda ishlab chiqarsa, uni sotishdan keladigan daromad maksimal bo’ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

3. Tikuv fabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 artikuldagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini tikish uchun sarflanadigan turli artikuldagi gazlamalar

normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir artikuldagi gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Gazlama artikuli	**1 ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)**				**Gazlamalarning umumiy miqdori (m)**
	I	**II**	**III**	**IV**	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Mahsulotlar ba-hosi (ming so'm)	9	6	4	7	

4. Korxona 4 xildagi mahsulot ishlab chiqarishda: tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlaridan foydalanadi. Har bir turdagi jihozning mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning umumiy ish vaqti fondi, hamda turli mahsulot birligini sotishdan olinadigan daromad ham ushbu jadvalda berilgan.

Jihoz turi	**Har bir turdagi bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan vaqt**				**Umumiy ish vaqti fondi (stanok-soat)**
	I	**II**	**III**	**IV**	
Tokarlik	2	1	1	3	300
Frezerlik	1	-	2	1	70
Silliqlash	1	2	1	-	340
Bir birlik mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.b.)	8	3	2	1	

Eng ko'p daromad keltiradigan ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

5. Korxona 3 turdagi mahsulotni ishlab chiqarmoqda. Ishlab chiqarishning bir oylik dasturiga asosan korxona 2000 ta 1- turdagi, 1800 ta 2 – turdagi va 1500 ta 3 – turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Mahsulot ishlab chiqarish uchun bir oylik xarajati 61000 kg dan oshmaydigan xom ashyo ishlatilmoqda. 1 – turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun 8 kg xom ashyo, 2- turdagi mahsulot birligi uchun 10 kg, 3 – turdagi mahsulot uchun esa 11 kg sarf qilinadi. 1- turdagi mahsulotning ulgurji bahosi 70 so'm, 2- va 3 - mahsulotlariniki esa mos ravishda 100 va 70 so'mni tashkil qiladi. Korxonaga maksimal daromad keltiradigan mahsulot ishlab chiqarishning optimal rejasi topilsin.

6. Mexanika zavodi 2 turdagi detalni ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va payvandlash jihozlarini ishlatadi. Shu borada har bir detalni 2 xil texnologik usul bilan ishlab chiqarish mumkin. Har bir jihozning vaqt fondi berilgan. Har bir texnologik usul bilan turli moslamada detallar birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt xarajati normasi va detallar birligini ishlanishidan olinadigan foydalar quyidagi jadvalda keltirilgan. Korxonaga maksimal foydani ta'minlovchi jihozlar yuklanishining optimal rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Jihoz turi	Detallar				Samarali vaqt fondi (stanok-soat)
	1		2		
	Texnologik usullar				
	1	2	1	2	
Tokarlik	3	2	3	0	20
Frezerlik	2	2	1	2	37
Payvandlovchi	0	1	1	4	30
Foyda, (sh.b.)	11	6	9	6	

7. Korxona omborida uzunligi 8,1 metr bo'lgan temir quymalar mavjud. Bu quymalardan ancha kichik bo'lgan 100 ta quyma mahsulotlar komplektini tayyorlash zarur bo'lsin. Har bir komplekt tarkibiga 2 ta 3 metrli, 1 ta 2 metrli va 1 ta 1,5 metrli quyma mahsulotlar kiradi. Berilgan materiallardan shunday foydalanish kerakki, quyma mahsulotlar komplekti talab qilingan miqdorda minimal chiqim bilan tayyorlansin. Turli xil usullardagi ishlov natijasida bir quymadan olinadigan xomaki mahsulotlar soni, hamda chiqindilar miqdori jadvalda keltirilgan.

Mahsulotlar o'lchami (m)	Kesish usullari								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	2	1	1	-	-	-	-	-
2	1	-	2	1	4	3	2	1	-
1,5	-	1	-	2	-	1	2	4	5
Chiqindilar (m)	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

8. Xo'jalik karam, kartoshka va ko'p yillik o'tlar ekishga moslashgan. Buning uchun xo'jalik ixtiyorida 850 ga haydaladigan er maydoni, 1500 tonna organik o'g'itlar, 50000 kishi-kunlar mehnat resurslari mavjud. Mahsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan er, organik o'g'it va mehnat resurslari xarajati quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xo'jalik karam, kartoshka va ko'p yillik o'tlardan qancha ishlab chiqarganda pul ifodasidagi yalpi mahsulot miqdori maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Ko'rsatkichlar	Ekin turi		
	Karam	Kartoshka	Ko'p yillik o't
Mehnat sarfi, (kishi-kun)	50	30	10
Organik o'g'itlar sarfi,(t)	20	15	10
Yalpi mahsulot chiqimi,(so'm)	1000	800	200

9. Quyidagi jadvalda berilgan ma'lumotlarga ko'ra hayvonlar ovqatlanishining optimal sutkali ratsionini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ovqatbop mahsulotlar (sh.b.)	Bir birlik xashak turdagi ovqatbop mahsulotlar tarkibi		Iste'molning minimal sutkalik normasi (sh.b.)
Xashak	1	0,5	5
Hazm qilinadigan protein	80	200	560
Kaltsiy	1	8	20
Bir birlik xashakning narxi,(so'm)	3	5	

10. Ratsion P_1 va P_2 mahsulotlardan iborat. Ularning har biriga A, V va S vitaminlar kiradi. Bir sutkalik minimal iste'mol A vitamin uchun 100 birlik, V dan 80 birlik, S dan esa 160 birlikni tashkil qiladi. Bir birlik P_2 mahsulotning bahosi 0,3 so'm, P_1 niki esa 0,2 so'm. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori keltirilgan. Eng arzon tushadigan ratsion variantini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Vitaminlar	Bir birlik mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori	
	P_1	P_2
A	0,1	0,5
V	0,25	0,1
S	0,2	0,4

11. Savdo tashkiloti 3 turdagi tovarlarni sotish uchun quyidagi resurslardan foydalanmoqda: vaqt va sotuv muassasalarining maydoni.

Har bir turdagi mahsulotning bir partiyasini sotish uchun resurslar xarajati jadvalda berilgan. 1- mahsulot turining 1- partiyasini ayirboshlashdan tushgan daromad 5 ming so'm, 2-sidan 8 ming so'm va 3- sidan 6 ming so'm. Savdo tashkilotiga maksimal foydani ta'minlovchi eng optimal tovar ayirboshlash rejasini topishning matematik modelini tuzing.

Resurslar	Tovarlar turlari			Resurslar hajmi
	1	2	3	
Vaqt	0,5	0,7	0,6	970
Maydon,(m^2)	0,1	0,3	0,2	90

12. Aholining talabini hisobga olgan holda poyafzal do'koni reja davrida charm poyafzallardan kamida 140000 (sh.b.) va boshqa poyafzallardan kamida 40000 (sh.b.) sotishi kerak. Ayirboshlashdan tushadigan daromad va xarajatlarni bilgan holda, do'kon tovaroboroti kamida 200000 (sh.b.) va uning daromadi 2500 dan kam bo'lmaslik shartida xarajatlarni minimallashtiruvchi sotuv rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ko'rsatkich (foiz)	Poyafzal	
	Charm poyafzal	Boshqa poyafzallar
Daromad	1	2
Xarajatlar	6	5

13. Uch xil R_1, R_2 va R_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun

to'rt xil S_1, S_2 ,S_3 va S_4 xom ashyolar ishlatiladi. Xom ashyolar zahirasi, har bir mahsulotga ketgan xom ashyo xarajatlarining texnologik normalari va mahsulotning birligining bahosi jadvalda keltirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotning pul ifodasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqish rejasini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Xom ashyo turlari	**Xom ashyo zahirasi (kg)**	**Bitta mahsulotga ketgan xom ashyolar normasi (kg)**		
		R_1	R_2	R_3
S_1	150000	4	2	1
S_2	170000	6	0	2
S_3	100000	0	2	4
S_4	200000	8	7	0
Bitta mah-sulotning bahosi (so'm)		100	150	200

14. 30-40 kg og'irlikdagi chorva mollarini ozuqlantirib, o'rtacha 300-400 kg og'irlikni ta'minlash uchun kunlik ratsion tarkibida quyidagi miqdorda ozuqlantiruvchi moddalar bo'lishi kerak: em-xashak birligi – 1,6 dan kam emas, hazm qilinadigan protein – 200 g dan kam emas, karotin – 10 mg dan kam emas. Ozuqlantirishda arpadan, dukkakli mahsulotlardan va somonli undan foydalaniladi. 1 kg emdagi ozuqa moddalarining tarkibi va 1 kg emning bahosi jadvalda ko'rsatilgan.

Kunlik ratsionning optimal rejasini tuzing.

Ozuqlantiruvchi moddaning nomi	**1 kg em tarkibidagi ozuqa moddalarining miqdori**		
	arpa	**dukkakli**	**somonli un**
Em birligi (shartli)	1,2	1,4	0,8
Hazm qilina-digan protein, g	80	280	240
Karotin, mg	5	5	100
1 kg emning bahosi,(sh.b.)	3	4	5

15. Yuzasi mos ravishda 0,8 va 0,6 mln.ga teng bo'lgan ikkita tuproq zonasi bor. Zonalar bo'yicha ekinlarning hosildorligi va 1 ts donning bahosi jadvalda keltirilgan. Kuzgi ekinlarni 20 mln.ts. dan kam bo'lmagan va bahorgi ekinlarni 6 mln.ts. dan kam bo'lmagan

miqdorda ishlab chiqarish talab qilinadi. Kuzgi va bahorgi donli ekinlar maydoni qanday bo'lganda pul ifodasidagi ishlab chiqarilgan jami mahsulotlar miqdori maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar turi	**hosildorlik, ts/ga**		**1 ts. mahsulot bahosi,$**
	1-zona	**2-zona**	
Kuzgi ekinlar	20	25	8
Bahorgi ekinlar	25	20	7

16. Jadvalda berilgan ma'lumotlarga asoslanib rejadan ortiq mebel ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, bunda mehnat rezervlaridan to'liq foydalangan holda ishlab chiqarilgan jami mahsulotning pul qiymati maksimallashtirilsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Ishlab chiqarish faktori	Faner, m^3	Taxta, m^3	Mehnat, kishi/smena	Narxi (ming so'm)
Sarflash normalari:				
1 servantga	0,2	0,1	2	150
1 shifonerga	0,1	0,2	1	120
I/ch faktorlari zahirasi	60	40	500	

17. Xo'jalikda chorvachilikni rivojlantirish uchun 324 ming so'm ajratilgan. Shundan 180 ming so'mi ish haqiga, 144 ming so'mi moddiy xarajatlar (texnik xizmat ko'rsatish) ga taqsimlangan. Jadvalda 1 ts. sut va go'sht uchun sarflanadigan xarajatlar, shuningdek, sotuv narxlari ko'rsatilgan. Xo'jalik kamida 6000 ts. sut va 1000 ts. go'sht ishlab chiqarishi kerak. Chorvachilik mahsulotlarini ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, unda xo'jalikning chorvachilikdan oladigan daromadi maksimal bo'lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	Mehnat sarfi, so'm	moddiy xarajatlar	Sotuv narxi, so'm
Sut	12	8	25
Go'sht	90	80	200

18. Qog'oz kombinati xilma-xil turdagi qog'ozlarni ishlab chiqarish rejasini bajardi. Shuningdek, xom ashyodan iqtisod qilib

qoldi. 50 t tsellyuloza, 80 t yog'och massasi va 2 t kaolin foydalanilmay qoldi. Jadvalda har xil turdagi qog'ozdan 1 t ishlab chiqarish uchun ketadigan tsellyuloza, yog'och massasi, kaolin normasi berilgan. 1 t bosmaxona qog'ozidan 5 birlik, 1 muqova qog'ozidan 6 birlik, 1 t yozuv qog'ozidan 8 birlik foyda ko'riladi. Iqtisod qilingan mahsulotdan qancha miqdorda va qanday qog'oz turini ishlab chiqarilsa, korxona foydasi ko'proq bo'ladi? Bunda xom ashyoning qaysi turi va qancha miqdori ortib qoladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	Xom ashyolar		
	Tsellyuloza	Yog'och massasi	Kaolin
Bosmaxona qog'ozi	206	829	20
Muqova qog'ozi	424	627	10
Yozuv qog'ozi	510	518	12

19. Maishiy xizmat uyidagi duradgorlik ustaxonasida savdo tarmoqlari uchun stol va tumbochkalar ishlab chiqarish yo'lga qo'yilgan. Ularni tayyorlash uchun ikki turdagi 72 m^3 va 56 m^3 yog'och bor. Jadvalda bir dona mahsulot uchun ketadigan yog'och miqdori ko'rsatilgan. Bitta stolni ishlab chiqarishdan ustaxona 4,4 birlik sof foyda oladi, bitta tumbochkadan 2,8 birlik foyda oladi. Ustaxona o'zida bor materialdan qancha stol va tumbochka ishlab chiqarsa, ko'proq foyda olish masalasining matematik modelini tuzing.

Mahsulot	Xom ashyolar	
	1 - turdagi yog'och	2 - turdagi yog'och
Stol	0,18	0,08
Tumbochka	0,09	0,28

20. Aviakompaniya ikki turdagi samolyotda ma'lum bir yo'nalishlarda passajirlarni tashishni amalga oshiradi. Birinchi tur samolyot ekipaji 3 kishidan iborat bo'lib, bir reysda 45 ta passajirni tashiydi, ikkinchi tur samolyot ekipaji 6 kishidan iborat bo'lib, bir reysda 80 ta passajirni tashiydi. Birinchi tur samolyotni ekspluatatsiya qilish 600 (sh.p.b.) , ikkinchi tur samolyotni ekspluatatsiya qilish 900 (sh.p.b.) bo'ladi.

Rejadagi davr ichida ushbu yo'nalishda 5000 ta passajir tashish kerakligi ma'lum. Agar har bir reysda 360 kishidan ortiq bo'lmagan kishini tashish mumkin bo'lsa, u holda ikkala turdagi samolyotlardagi reyslar miqdori qancha bo'lganda samolyotlarni

ekspluatatsiya qilish xarajatlari minimal miqdorda bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

21. Tsexning bir uchastkasi ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Bir kunlik reja bo'yicha birinchi turdagi mahsulotdan (№ 1) 60 dona, ikkinchi turdagi mahsulotdan (№ 2) 80 ta ishlab chiqarilishi kerak. Bir kunlik resurslar esa quyidagicha: ishlab chiqarish uskunalari 600 stanok-soat, xom ashyo 300 t, 420 kishi-soat mehnat resursi va 450 kVt/soat elektroenergiya. Bir dona mahsulotga sarf qilinadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda berilgan. Birinchi mahsulotning narxi 50 so'm, ikkinchi turdagi mahsulotning narxi 60 so'm. Ishlab chiqariladigan mahsulotlardan maksimal foyda ko'rish uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish kerak? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	**i/ch uskunasi (st/s)**	**Xom ashyo (t)**	**Mehnat (kishi/soat)**	**Elektroenergiya (kVt/s)**
№ 1	4	2	2	3
№ 2	3	1	3	2

22. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda A vitamindan 6 birlik, V vitamindan 12 birlik, S vitamindan 4 birlik bo'lishi kerak. Mollarni boqish uchun ikki turdagi emdan foydalaniladi. Jadvalda em tarkibidagi foydali ozuqa moddalari ulushi, ozuqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoj va emlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo'lgan kundalik ratsionni aniqlang, masalaning matematik modelini tuzing.

Ozuqa moddalari	**1 kg emdagi ozuqa moddalari miqdori**		**Mollarning ozuqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoji**
	I	**II**	
A	2	1	6
V	2	4	12
S	0	4	4
1 kg emning narxi,(so'm)	50	60	

23. Benzinning 2 turidan A va V aralashmasi hosil bo'ladi. A aralashmasi 60 % 1- navli benzindan, 40 % 2- nav benzindan tashkil topadi. V aralashmasi 80 % 1- nav benzindan, 20 % 2- nav

benzindan tashkil topadi. 1 kg A aralashmasining narxi 10 birlik, 1 kg V aralashmasining narxi 12 birlik: 1-nav benzindan 50 t, 2- nav benzindan 30 t mavjud bo'lgan holda eng qimmat narxli aralashma hosil qilish masalasining matematik modelini tuzing.

24. Toshko'mirning 3 ta punktdan 4 ta punktga tashish rejasini shunday tuzingki, unda jami transport xarajatlari minimallashtirilsin. Shaxtalarning bir sutkalik ishlab chiqarish hajmi, iste'mol punktlarining ko'mirga bo'lgan talabi va 1 tonna ko'mirni tashish xarajatlari jadvalda keltirilgan.

Shaxtalar	1 t ko'mirni iste'molchiga tashish xarajatlari, (so'm)				Shaxtalarning ishlab chiqarish hajmi, (ming t)
	V_1	V_2	V_3	V_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	4	50
Buyurtmachi-lar talabi, (ming t)	75	80	60	85	300

Masalaning matematik modelini tuzing.

25. To'rtta A_1, A_2, A_3, A_4 omborxonalarda mos ravishda 40, 50, 60, 30 tonna yoqilg'i bor. Bu yoqilg'ilarni talablari mos ravishda 60, 80, 40 tonna bo'lgan 3 ta V_1, V_2, V_3 iste'molchilarga shunday tashish kerakki, sarf qilingan umumiy transport xarajatlari minimal bo'lsin. (1 tonna yoqilg'ini tashish xarajatlari jadvalda keltirilgan:

Omborlar	1 t yoqilg'ini iste'molchilarga tashish narxi (sh.b.)			yoqilg'i zahiralari (t)
	V_1	V_2	V_3	
A_1	4	3	5	40
A_2	6	2	1	50
A_3	7	4	2	60
A_4	5	6	3	30
yoqilg'iga talab (t)	60	80	40	180

Masalaning matematik modelini tuzing.

2- mashg'ulot

Chiziqli programmalash masalasining umumiy qo'yilishi va uning turli formalarda ifodalanishi. Chiziqli programmalash masalasining kanonik ko'rinishi.

1- masala. Quyidagi ChPMni kanonik ko'rinishga keltiring, hamda uni vektor va matritsa formasida ifodalang.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$$

Echish. Dastlab chiziqli funktsiyani maksimalashtirishdan minimallashtirish masalasiga o'tamiz. Buning uchun maqsad funktsiyani (-1) ga ko'paytirish kifoyadir. So'ngra tengsizliklar shaklida berilgan chegaraviy shartlardan tenglamalarga o'tamiz.

Natijada quyidagi kanonik ko'rinishdagi ChPMni hosil qilamiz.

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5,6,7$$

Ushbu masala vektor formada quyidagicha ifodalanadi:

$$F = C \cdot X \to \min,$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 + P_7x_7 = P_0,$$

$$X \ge 0.$$

Bunda *S=(-1;2;-1;1;0;0;0), X=(*x_1*,* x_2 x_3*,* x_4*,* x_5*,* x_6*,* x_7*)*- vektor

qator, S*X*- skalyar ko'paytma, hamda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

-shart vektorlari.

Masalaning matritsa formasidagi ifodalanishi esa quyidagicha:

$$F = C \cdot X \to \min$$

$$A \cdot X = B_0$$

$$X \geq 0$$

Bunda *S=(-1;2;-1;1;0;0;0)* ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ -}$$

shart matritsasi.

Masaladagi nomanfiy x_5, x_6, x_7 o'zgaruvchilar qo'shimcha o'zgaruvchilar deb ataladi va ularning maqsad funktsiyasidagi koeffitsientlari 0 ga teng deb hisoblanadi.

Konkret iqtisodiy-matematik modellarda ishtirok etuvchi qo'shimcha o'zgaruvchilarning har biri tayin iqtisodiy ma'noga ega bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Mustaqil echish uchun masalalar

Quyidagi berilgan masalalarning har birini kanonik ko'rinishga keltiring, hamda uni vektor va matritsa formalarida ifodalang.

1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 \le 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \to min$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \le 18 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to max$

3.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 8x_4 \ge 3 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 \to min$

4.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$

5.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 18 \\ x_3 \le 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \max$

6. 1- mashg'ulotning matematik modellaridan foydalanib, ularning har birini kanonik ko'rinishga keltiring va qo'shimcha o'zgaruvchilarning iqtisodiy ma'nosini bayon qiling.

3- mashg'ulot

Chiziqli programmalash masalasining geometrik talqini. Chiziqli programmalash masalasini grafik usulda echish.

Chiziqli programmalash masalasini grafik usulda echish, asosan noma'lumlari soni ikkita bo'lgan va chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklar shaklida berilgan masalalarga qo'llaniladi.

1-masala.

Firma ikki xil A va V mahsulotlarni ishlab chiqaradi. Har bir mahsulotga I, II va III turdagi mashinalarning har birida ishlov beriladi. Mahsulotlarga mashinalarda ishlov berish soatlari quyidagicha berilgan:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
V	0,25	0,3	0,4

I, II, III mashinalarning haftalik ishlash vaqtlari mos ravishda 40, 36 va 36 soatni tashkil etadi. Sotilgan A va V mahsulotlardan mos ravishda 5 va 3 birlik foyda olinadi.

Firmaga maksimal foyda keltiradigan haftalik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinadi. Masalani ChPM shaklida ta'riflang va uni eching.

Echilishi:

Hafta davomida ishlab chiqarish rejalashtirilgan A mahsulot miqdori x_1 va V mahsulot miqdori x_2 bo'lsin.

U holda, masalaning berilganlaridan foydalanib, quyidagi ChPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \le 40 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \le 36 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \le 36 \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (2)$$

$$F=5x_1+3x_2 \to max \qquad (3)$$

Bu masalada noma'lumlar soni ikkita, hamda chegaraviy shartlar tengsizliklar shaklida bo'lganligi uchun grafik usulni qo'llash mumkin.

Masaladagi (1) va (2) chegaraviy shartlardagi har bir tengsizlik X_1OX_2 koordinata tekisligida chegaralari mos

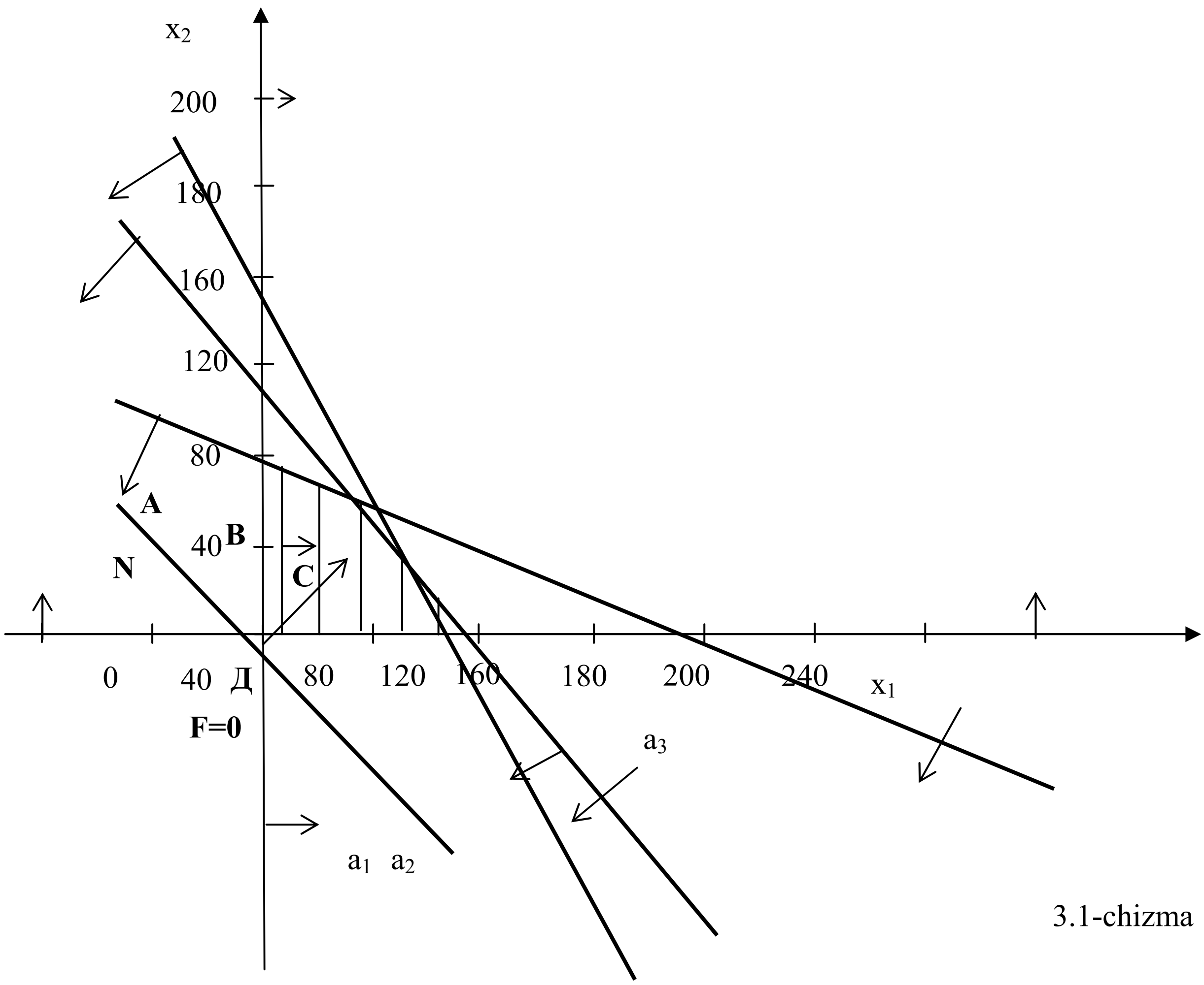
$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 36 & (a_2) \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 = 36 & (a_3) \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlardan va koordinata o'qlaridan iborat yarim tekisliklarni ifodalaydi.

Ushbu yarim tekisliklarni va ularning kesishmasidan iborat bo'lgan rejalar ko'pburchagini chizib olamiz, hamda $\vec{N} = (5;3)$ yo'naltiruvchi vektor yordamida

$$F=5x_1+3x_2$$

maqsad funktsiyasiga maksimal qiymat beruvchi nuqtani aniqlaymiz.



3.1-chizma

Chizmadan ko'rinib turibdiki, $F=5x_1+3x_2$ maqsad funktsiyasi o'zining maksimal qiymatiga AVSDO – rejalar ko'pburchagining S nuqtasida erishadi. Bu nuqta a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo'lganligi uchun uning koordi-

natasini

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 36 & (a_2) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini echib topamiz. Sistemaning echimi $x_1=60$ va
$x_2=40$. Bu echimga maqsad funktsiyasining $F_{max}= 5 \cdot 60 + 3 \cdot 40= 420$ qiymati mos keladi.

Shunday qilib, firma 420 birlik foydaga erishish uchun A mahsulotdan 60 ta va V mahsulotdan 40 ta ishlab chiqarishni rejalashtirishi kerak bo'ladi. Bunda I va II tur mashinalarning ish vaqti fondidan to'laligicha foydalaniladi., hamda III tur mashina vaqtidan ($0{,}2x_1+0{,}4x_2 \leq 36$ tengsizlikka ko'ra) 8 soat ortib qoladi.

2- masala. Quyidagi ChPMni eching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8 \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5 \qquad (5)$$

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \to \max \qquad (6)$$

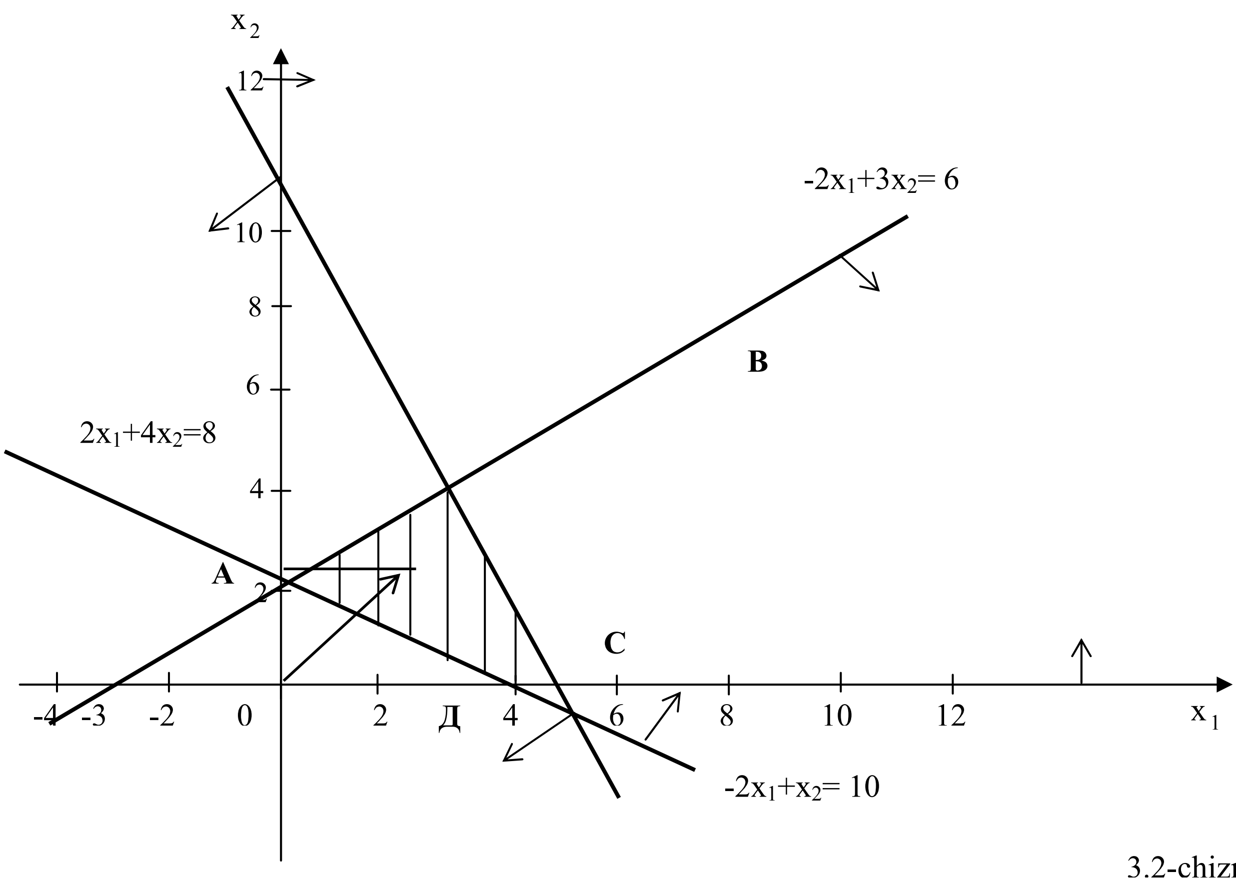
Echilishi. Ushbu masaladagi tenglamalar sistemasidan nomanfiy x_3, x_4, x_5 noma'lumlarning har birini x_1 va x_2 noma'lumotlar orqali ifodalab, ularni maqsad funktsiyasiga qo'ysak, ikki noma'lumli, chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan iborat bo'lgan ChPM hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Bu masalaning rejalar ko'pburchagini yasab olamiz:



3.2-chizma

Chizmadan rejalar ko'pburchagining V nuqtasi optimal echim ekanligi ravshandir. Bu nuqtaning koordinatasini

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$$

tenglamalar sistemasining echimi sifatida topamiz. Sistemani echib $x_1=3$ va $x_2=4$ qiymatlarni olamiz. Bu qiymatlarni dastlabki berilgan (4) sistemaga qo'yib $x_3=0$ va $x_4=0$ va $x_5=14$ qiymatlarni va ularga mos keluvchi maqsad funktsiyasining $F_{max}=18$ qiymatini hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan (4), (5) va (6) masalaning echimi $X_{opt}=(3;4;0;0;14)$ va $F_{max}=18$ dan iborat ekanligini aniqlaymiz.

Umuman, chegaraviy shartlari n ta noma'lum va m ta chiziqli erkli tenglamalarni o'z ichiga olgan masalalarni ham, agar n-m=2 munosabat bajarilsa, grafik usul yordamida echish mumkin. Bunga oid quyidagi masalani keltiramiz.

3-masala. Chiziqli progrpmmalash masalasini grafik usul yordamida eching.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases} \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5. \quad (8)$$

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max \quad (9)$$

Echilishi: Bu masalada n=5 va m=3 bo'lib, n-m=2 bo'lganligi uchun grafik usulni qo'llash mumkin. Dastlab, Jordan-Gauss usuli yordamida (7) sistemaning har bir tenglamasida bittadan bazis o'zgaruvchilarni (masalan x_1, x_2, x_3-o'zgaruvchilarni) ajratamiz. Natijada (7) sistemaga teng kuchli bo'lgan quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \quad (10)$$

Bundan esa, bazis o'zgaruvchilarga nisbatan echilgan sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{cases} \quad (11)$$

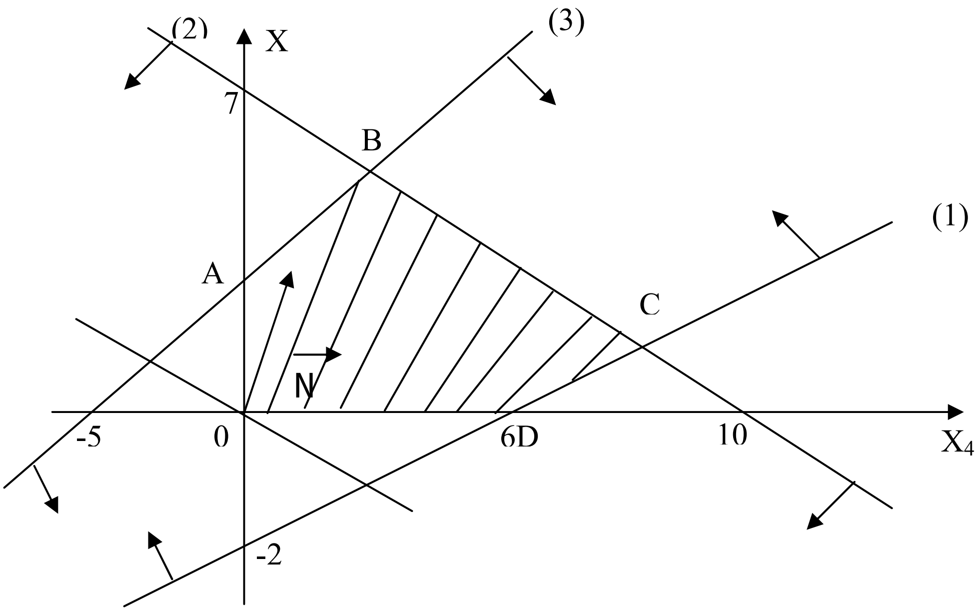
Bazis o'zgaruvchilarning bu qiymatlarini maqsad funktsiyasiga qo'yib, hamda (10) sistemada bazis o'zgaruvchilarni tanlab yuborib, ikki noma'lumli quyidagi chiziqli progrpmmalash masalasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$F = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max$$

$x_4 0 x_5$ koordinata tekisligida rejalar ko'pburchagini, maqsad funktsiyasini va yo'naltiruvchi vektorni tasvirlaymiz.



3.3- chizma.

Chizmaga asosan maqsad funktsiyani o'zining maksimal qiymatiga rejalar ko'pburchagining V nuqtasida erishishini ko'ramiz.

Bu nuqta koordinatalarini

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

sistemani echib topamiz: $x_4 = 2;\ x_5 = \frac{28}{5}.\quad F_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58$

Dastlabki berilgan (7), (8), (9) masalaning echimini hosil qilish uchun $x_4 = 2$ va $x_5 = \frac{28}{5}$ qiymatlarni (11) sistemaga qo'yamiz.

Natijada $x_1 = \frac{104}{5},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ qiymatlarni olamiz. Shunday qilib,

$X_{onm} = (\frac{104}{5};0;0;2;\frac{28}{5})$ va $F_{\max} = 58$.

Mustaqil echish uchun masalalar.

Quyidagi masalalarni grafik usulida eching.

1. Mebel fabrikasi shkaf va stollar ishlab chiqarish uchun zarur resurslardan foydalanadi. Har bir turdagi mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi, 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad va bor bo'lgan resurslarning umumiy miqdori quyidagi jadvalda berilgan.

Resurslar	**1 ta mahsulotga sarflanadigan resurslar miqdori**		**Resurslarning umumiy miqdori**
yog'och (m)			
1 xil uchun	0,2	0,1	40
2 xil uchun	0,1	0,3	60
Mehnat sarfi (kishi-soat)	1,2	1,5	371,4
1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad	6	8	

Fabrika qancha stol va shkaf ishlab chiqarsa, ularni sotishdan kelgan daromad maksimal bo'ladi?

2. A va V turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlari ishlatiladi. Har bir turdagi jihozning har bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqtlari normalari jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning ish vaqti umumiy fondi hamda 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Jihoz turi	**1 ta mahsulot tayyorlashga sarflanadigan vaqt (soat)**		**Jihozning foydali ish vaqti umumiy fondi (s)**
	A	**V**	
Frezerlik	10	8	168
Tokarlik	5	10	180
Silliqlash	6	12	144
1 ta mahsulot sotishdan keladigan daromad (so'm)	14	18	

A va V mahsulotlar ishlab chiqarishning shunday rejasi

topilsinki, ulardan keladigan daromad maksimal bo'lsin.

3. Mebel fabrikasida standart faner listlardan 3 turdagi xomashyodan mos ravishda 24, 31 va 18 dona qirqishi kerak. Har bir faner listidan 2 usul bilan xomashyolar qirqish mumkin. Berilgan usul bo'yicha qirqish natijasida hosil bo'ladigan xomashyolar soni jadvalda berilgan. Berilgan usul bo'yicha 1 ta faner listni qirqishdan hosil bo'lgan chiqindilar o'lchami ham quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomashyolar turi	Usul bo'yicha qirqishdan hosil bo'lgan xomashyolar soni (dona)	
	1- usul	**2- usul**
1	2	6
2	5	4
3	2	3
qirqimlar (chiqindilar) o'lchami(kv.sm)	12	16

Qancha faner listi va qaysi usulda qirqilganda minimal chiqindi hosil bo'ladi, hamda zarur xomashyolar sonidan kam bo'lmagan xomashyo olinadi?

4. Fermasida qo'ng'ir va sariq tulki parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi ozuqa ishlatiladi. Qo'ng'ir va sariq tulkilar uchun har kungi zarur bo'lgan har bir turdagi ozuqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi ozuqaning umumiy miqdori va 1 ta qo'ng'ir tulki va sariq tulki terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	Har kungi zarur bo'lgan ozuqa birligi miqdori		ozuqaning umumiy miqdori
	qo'ng'ir tulki	**sariq tulki**	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = x_1 + x_2 \to \max$

6.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

7.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = -2x_1 + x_2 \to min$

8.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$

9.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$

10.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 - 2x_2 \to \max,\ (\min)$

11.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

12.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq 7 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 5x_1 - x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 3 \end{cases}$$

$x_2 \geq 0$

$F = 4x_1 + 3x_2 \to \min$

13.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$

$F = 3x_1 - 10x_2 \to \min, (\max)$

14.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\ (\min)$

15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$F = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to \min, (\max)$

16.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$F = 4x_1 + 5x_2 \to \max,\ (\min)$

17.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min, (\max)$

18.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max,\ (\min)$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

$x_j \geq 0$

$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max$.

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19 \end{cases}$

$x_j \geq 0$

$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max$.

4- mashg'ulot

Chiziqli programmalash masalasining tayanch rejalari. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis echimlaridan birini topish.

Chiziqli programmalash masalasining geometrik talqiniga ko'ra, masalaning mumkin bo'lgan echimlari to'plami qavariq ko'pyoqlidan iborat bo'ladi. Bu ko'pyoqlining har bir uchiga (chetki nuqtasiga) tayin bir tayanch reja mos keladi. Chiziqli programmalash masalasining maqsad funktsiyasi o'zinig optimal qiymatiga shu tayanch rejalardan birida erishadi. Noma'lumlari soni 2 ta bo'lgan (yoki n-m=2 shartni qanoatlantiruvchi, n-noma'lumlar soni, m- tenglamalar soni) hamda chegaraviy shartlari tengsizliklar shaklida berilgan masalalarning tayanch rejalarini geometrik tasvirlash mumkin.

1. Quyidagi chiziqli programmalash masalasining barcha tayanch rejalarini toping.

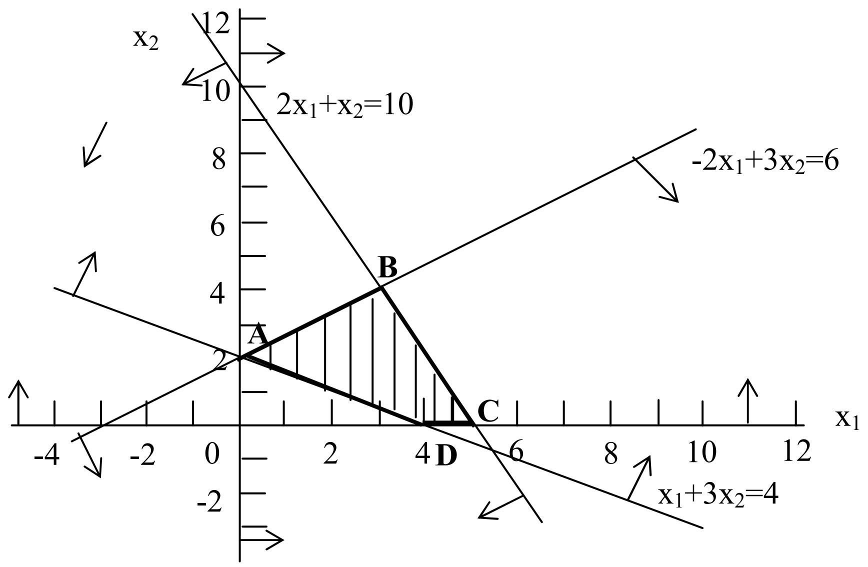
$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Echish. Chegaraviy shartlarga binoan echimlar ko'pburchagini, mumkin bo'lgan to'plamlarini chizib olamiz.

$2x_1+x_2=10$ $-2x_1+3x_2=6$ $x_1+2x_2=4$



Chizmadan ko'rinib turibdiki, echimlar ko'pburchagi ABCD-

ko'pburchakdan iborat bo'lib, bu ko'pburchakning A,B,C va D uchlariga berilgan masalaning X_A= (0;2), X_B= (3;4), X_C= (5;0) va X_D= (4;0) tayanch rejalari mos keladi. Bunda B nuqtaning koordinatalari ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatalari, ya'ni

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining echimi sifatida topilganligini eslatib o'tamiz.

Shunday qilib, berilgan masalaning barcha tayanch rejalari to'rtta bo'lib, ular X_1= (0;2), X_2= (3;4), X_3= (5;0) va X_4= (4;0) echimlardan iboratdir.

Chiziqli programmalash masalasini echish chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasining nomanfiy echimlarini topish bilan bog'liqdir. Sistemaning nomanfiy bazis echimini (yoki ChPMning tayanch rejasini) topishda qaysi o'zgaruvchini qaysi tenglamadan bazis o'zgaruvchi sifatida ajratilishi farqsiz emas. Mana shu shartlarni e'tiborga oluvchi usullardan birini quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

2-masala.

Berilgan tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis echimlaridan birini toping.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>Echish.</u> Dastlab sistemadagi barcha tenglamalarni bir-biriga qo'shib, nazorat tenglama (n.t.) deb ataluvchi tenglamani hosil qilamiz. Bizning misolda nazorat tenglama

$-4x_1 + x_2 + 7x_4 - 5x_5 = 18$ tenglamadan iboratdir.

Nazorat tenglama ikki xil vazifani bajaradi:

1) ajratilishi kerak bo'lgan bazis o'zgaruvchi nazorat tenglamadan tanlanadi;

2) har bir qadamdan keyin hosil bo'lgan nazorat tenglama bazis o'zgaruvchisi bo'lmagan tenglamalar yig'indisiga teng ekanligiga asoslanib, hisoblash jarayoni to'g'ri olib borilayotganligini tekshirib borish mumkin.

Nazorat tenglamadan koeffitsienti eng katta bo'lgan o'zgaruvchi (masalan x_k) tanlanadi va bu o'zgaruvchi uchun aniqlovchi koeffitsientlar (a.k) deb ataluvchi

$$\frac{b_i}{a_{ik}} \text{ (bunda } b_i \geq 0, a_{ik} > 0\text{)}$$

nisbatlar topiladi. Aniqlovchi koeffitsientlardan eng kichigiga

mos tenglamadan x_k o'zgaruvchini ajratib, uni elementar almashtirishlar yordamida qolgan tenglamalardan va nazorat tenglamadan ham yo'qotamiz. Ushbu jarayonni har bir tenglamada bittadan bazis o'zgaruvchi hosil bo'lguncha yoki nazorat tenglama 0=0 ko'rinishga kelgandan so'ng, javobni yozish mumkin. Buning uchun bazis o'zgaruvchilarni mos ozod hadlarga, bazismas o'zgaruvchilarni esa nolga teng deb olish kerak.

Endi yuqorida aytilgan amallarni berilgan misolga nisbatan qo'llaymiz va hisoblash jarayonlarini qulaylik uchun quyidagicha jadvalda olib boramiz.

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	a.k.	
1	-1	-1	0	2	-3	7	7/2	
2	-2	1	-1	$\boxed{5}$	-2	8	8/5*	I qadam
3	-1	1	1	0	0	3	-	
n.t	-4	1	0	7*	-5	18		
1	-1/5	-7/5	2/5	0	-11/5	19/5	19/2	
2	-2/5	1/5	-1/5	1	-2/5	8/5	-	II qadam
3	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	3	3*	
n.t	-6/5	-2/5	7/5*	0	-11/5	34/5		
1	$\boxed{1/5}$	-9/5	0	0	-11/5	13/5	13*	
2	-3/5	2/5	0	1	-2/5	11/5	-	III qadam
3	-1	1	1	0	0	3	-	
N.t	1/5*	-9/5	0	0	-11/5	13/5		
1	1	-9	0	0	-11	13		
2	0	-5	0	1	-7	10		IV qadam
3	0	-8	1	0	-11	16		
n.t	0	0	0	0	0	0		

Javob: $X= (13;0;16;10;0)$

Eslatma. (Nomanfiy bazis echimning mavjud bo'lmaslik sharti).

Agar biror qadamda sistemada kamida bitta tenglama

$$a_1x_1+a_2x_2+...+ a_nx_n=b$$

ko'rinishga kelib, barcha $a_1, a_2,..., a_n$ koeffitsientlar manfiy va b>0 bo'lsa, sistema nomanfiy echimga ega bo'lmaydi.

Agar biror tenglama

$$0x_1+0x_2+...+ 0x_n=b$$

ko'rinishda bo'lib, $b\neq 0$ bo'lsa, berilgan sistema umuman hech qanday echimga ega bo'lmaydi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

ChPMning geometrik talqinidan foydalanib, quyidagi masalalarning barcha tayanch echimlarini toping.

1.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.

$$F = -x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3.

$$F = 4x_1 + 6x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4.

$$F = -3x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

5. $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

6. $F = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 6x_1 - x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis echimlaridan birini toping

7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$Ж: \ X = (3;2;0;0;0)$

8.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$Ж: \ X = (9;12;0;0)$

9.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 6x_4 - 8x_5 = 18 \\ 2x_1 - x_2 - 15x_3 - 9x_4 - 12x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 20x_3 - 12x_4 - 16x_5 = 1 \end{cases}$$

$Ж: \ X = (3;4;0;0;0 \ )$

10.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$Ж: \ X = (5;0;0;3;7 \ )$

11.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

J: Nomanfiy echim mavjud emas.

12.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (5;1;0;0;0)$

13.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 7x_6 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 6x_6 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 10 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (1;1;1;1;0;\ 0)$

14.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3 \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (4;1;1;0;0)$

5- mashg'ulot

Chiziqli programmalash masalasini echishning simpleks usuli.

Simpleks usulni quyidagi masalani echish jarayonida tavsiflaymiz:

1- masala. Quyidagi ChPM ni simpleks usulda eching.

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5$$

Echish. Masalaning tenglamalar sistemasini vektor formada yozib olamiz:

$$x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 + x_4R_4 + x_5R_5 = R_0,$$

bunda

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$C = (-2;-1;1;-1;1).$

Berilgan R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 vektorlar orasida uchta birlik R_3, R_4 va R_5 vektorlar bo'lganligi uchun, masalaning boshlang'ich tayanch rejasini bevosita yozish mumkin.

$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 5;\ 9;\ 7)$

Birlik vektorlarga mos x_3, x_4 va x_5 - o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar bo'lib, qolgan x_1, x_2 x_3 - o'zgaruvchilar esa bazismas o'zgaruvchilardir. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi chiziqli funktsiya koeffitsientidan tuzilgan vektor $S_{baz}(1;-1;1)$ dan iborat.

Masalani quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz. Jadvalning m+1 qatoriga rejaning bahosi deb ataluvchi va

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}C_i - C_j$$

formula orqali aniqlanuvchi ko'rsatkichlar joylashtiriladi. Agar barcha $\Delta_j \leq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ bo'lsa, topilgan tayanch reja optimal echim bo'ladi. Agar birorta $j=k$ uchun $\Delta_k > 0$ bo'lsa, u holda topilgan tayanch echim optimal reja bo'lmaydi. Uni boshqa tayanch rejaga almashtirish kerak. Tayanch rejalarni almashtirish jarayoni optimal echim topilguncha yoki uning echimi yo'q ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Simpleks usulni qo'llab, I qadamda $\max\limits_{\Delta_j \succ 0} \Delta_j = 3$ ga mos keluvchi R_2 bazisga kiritilib, R_5 vektor bazisdan chiqariladi. II qadamda $\Delta_3 = \dfrac{1}{2}$ ga mos keluvchi R_1 vektor bazisga kiritilib, R_3 bazisdan chiqariladi va nihoyat III qadamda optimal echim topiladi.

i	Bazis	S_δ	R_0	-2	-1	1	-1	1	A.K.
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	
1	R_3	1	5	1	1	1	0	0	5
2	R_4	-1	9	2	1	0	1	0	9
3	R_5	1	7	1	$\boxed{2}$	0	0	1	7/2*
m+1	Δ_j=	F_j -C_j	3	2	3*	0	0	0	
1	R_3	1	3/2	$\boxed{1/2}$	0	1	0	-1/2	3*
2	R_4	- 1	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
3	R_2	- 1	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
m+1	Δ_j=	F_j-C_j	-15/2	1/2*	0	0	0	-3/2	
1	R_1	- 2	3	1	0	2	0	- 1	
2	R_4	- 1	1	0	0	- 3	1	1	
3	R_2	- 1	2	0	1	- 1	0	1	
m+1	Δ_j=	F_j-C_j	-9	0	0	- 1	0	- 1	

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, berilgan masalaning optimal rejasi X*=(3; 2; 0; 1; 0) bo'lib, unga chizilgan funktsiyaning F_{min}= -9 qiymati mos keladi. Topilgan echim yagonadir, chunki nolga teng Δ_j baholar faqat bazis vektorlar uchun o'rinlidir.

2. Quyidagi ChPMni simpleks usulida eching:

$$F = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3$$

Berilgan masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$F = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3$$

Chegaraviy shartlarda qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib tengsizliklardan tengliklarga o'tamiz. (Qo'shimcha o'zgaruvchilarning chiziqli funktsiyadagi koeffitsentlari nolga mos kelishini eslatib o'tamiz).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5,6$$

Sistemani vektor formada yozib olamiz:

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 + x_4 R_4 + x_5 R_5 + x_6 R_6 = R_0 ,$$

bunda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

S=(1;-1;-3;0;0;0), *S_{baz}=(0;0;0).*

Birlik vektorlarga mos x_4 , x_5 , x_6 - o'zgaruvchilarni mos ozod hadlarga tenglab, bazismas x_1 , x_2 x_3 o'zgaruvchilarni esa nolga teng deb, boshlang'ich tayanch rejani hosil qilamiz.

X_0= (0; 0; 0; 1; 2; 5)

Keyingi hisoblash jarayonlarini quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz:

i	Bazis	S_δ	R_0	1	-1	-3	0	0	0	A.K.
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	
1	R_4	0	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	1*
2	R_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0	-
3	R_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		0	-1	1	3*	0	0	0	
1	R_3	-3	1	2	-1	1	1	0	0	-
2	R_5	0	3	-2	1	0	1	1	0	3*
3	R_6	0	4	1	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	4
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-3	-7	4*	0	-3	0	0	
1	R_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	-
2	R_2	-1	3	-2	1	0	1	1	0	-
3	R_6	0	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	1/3
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-15	1*	0	0	-7	-4	0	
1	R_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	R_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	
3	R_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	

To'rtinchi qadamda **(m+1)** – satrda $\Delta_j = F_j - C_j \le 0$ optimallik sharti bajarilganligi uchun

$X^*= (1/3;\ 11/3;\ 4;\ 0;\ 0;\ 0)$

reja optimal bo'lib, unga $F_{min}= -46/3$ qiymat mos keladi. Dastlabki berilgan masalaning echimi esa

$X_{opt}= (1/3;\ 11/3;\ 4)$, $F_{max}= 46/3$.

bo'lib, ushbu echim yagona ekanligini simpleks jadvalda ko'rish mumkin, ya'ni nolga teng $\Delta_j = F_j - C_j$ baholar faqat bazis vektorlar uchun o'rinlidir.

Boshlang'ich tayanch rejasi berilmagan chiziqli programmalash masalalarning chegaraviy shartlaridan iborat tenglamalar sistemasidaelementar almashtirishlar bajarib, biror tayanch echimni (nomanfiy bazis echimni) topib, so'ngra simpleks usul yordamida optimal echimni aniqlash mumkin. Chegaraviy shartlarda ozod hadi manfiy bo'lgan tenglamalar qatnashsa, bunday tenglamalarning chap va o'ng tomonini –1ga ko'paytirib, ozod hadni musbat qilib olish kerak.

Bunga oid quyidagi masalani qaraymiz.

3-masala.

Dastlab chiziqli progrpmmalash masalasining biror tayanch rejasini toping va simpleks usul yordamida optimal echimni aniqlang.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 7x_5 = -8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4,5.$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamaning ozod hadi manfiy bo'lganligi uchun, uning ikkala qismini (-1) koeffitsentga ko'paytirib, ozod hadni musbat qilib olamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

Bu sistemaning nomanfiy bazis echimlaridan birini, (yoki chiziqli progrpmmalash masalasining tayanch rejalaridan birini) masalan, 4-mashg'ulotda ko'rilgan usul yordamida topib olaylik. Hisoblash jarayonlarini quyidagi jadvalda bajaramiz.

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	a.k
1	1	2	-3	1	-5	5	5
2	2	3	-5	2	-7	8	4
3	3	1	-2	$\boxed{6}$	2	5	1*
N.T	6	6	-10	9*	-10	19	
1	1/2	$\boxed{11/6}$	-8/3	0	-16/3	4	24/11*
2	1	8/3	-13/3	0	-23/3	6	9/4
3	1/2	1/6	-1/3	1	1/3	1	6
N.T	3/2	9/2*	-7	0	-13	10	
1	3/11	1	-16/11	0	-32/11	24/11	8
2	$\boxed{3/11}$	0	-5/11	0	1/11	2/11	2/3*
3	5/11	0	-1/11	1	9/11	7/11	7/5
N.T	3/11	0	-5/11	0	1/11	2/11	
1	0	1	-1	0	-3	2	
2	1	0	-5/3	0	1/3	2/3	
3	0	0	2/3	1	2/3	1/3	
N.T	0	0	0	0	0	0	

Jadvalning oxirgi bosqichida dastlab berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 3x_5 = 2 \\ x_1 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

sistemani va boshlang'ich $X_0 = (\frac{3}{2};2;0;\frac{1}{3};0)$ tayanch rejani hosil qilamiz.

Bu tayanch rejani optimallikka tekshirish uchun simpleks jadvalni tuzamiz va $\Delta_j = F_j - C_j -$baholarning qiymatlarini hisoblaymiz.

i	Bazis	S_5	R_0	-3	-4	-1	-2	1	a.k
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	
1 2 3	R_2 R_1 R_4	-4 -3 -2	2 2/3 1/3	0 1 0	1 0 0	-1 -5/3 2/3	0 0 1	-3 1/3 2/3	- - 1/2
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-32/3	0	0	26/3*	0	26/3	
1 2 3	R_2 R_1 R_3	-4 -3 -1	5/2 3/2 1/2	0 1 0	1 0 0	0 0 1	3/2 5/2 3/2	-2 2 1	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	0	0	0	-13	0	

Shunday qilib, masalaning optimal plani

$X_{onm} = (\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0)$ bo'lib, unga F_{max}=15 qiymat mos keladi. Shuni ta'kidlash kerakki, olingan $X = (\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0)$ - optimal plan yagona emas, chunki bazisga kirmagan P_5 vektorga 0 ga teng bo'lgan baho mos keladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

Quyida berilgan chiziqli programmalash masalalarini simpleks usulda eching.

1.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2$$

2.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2$$

3.

$$F = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le 15 \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

4.

$$F = 7x_1 + 9x_2 - 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

5.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

6.

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2$$

7.

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$$

8.

$$F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3$$

9.

$$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5,6$$

10.

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5,6$$

Quyidagi masalalarda dastlab ChPMning biror tayanch rejasini toping va simpleks usulini qo'llab optimal echimni aniqlang.

11.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$$

12.

$$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5$$

13.

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5$$

14.

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

15.

$$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

16.

$$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

17.

$$F = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$$

18.

$$F = -x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 - 7x_5 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$$

19.

$$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5,6$$

20.

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6$$

6- mashg'ulot

Sun'iy bazis usuli.
Simpleks usulining qo'llanilishi.

Ma'lumki, kanonik shaklda berilgan chiziqli programmalash masalasining shartlaridan iborat bo'lgan sistemaning har bir tenglamasida bazis o'zgaruvchilar qatnashsa, u holda masalaning tayanch rejasini osonlikcha ko'rsatish mumkin. Lekin, tayanch echimlarga ega bo'lgan ko'pgina chiziqli programmalash masalalarining shartlarida bazis o'zgaruvchilar (yoki birlik vektorlar) qatnashmagan bo'ladi. Albatta, bunday hollarda elementar almashtirishlar yordamida berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan hamda bazis o'zgaruvchilar qatnashgan tenglamalar sistemasini hosil qilish va dastlabki tayanch rejani topish mumkin.

Kanonik ko'rinishda berilgan chiziqli programmalash masalalarining boshlang'ich tayanch rejaini, sun'iy bazis usuli deb ataluvchi usul yordamida ham topish mumkin va topilgan tayanch rejani simpleks jadvalga yozib, masalani simpleks usuli yordamida echish mumkin bo'ladi.

Sun'iy bazis usulining algoritmi quyidagicha:

Chiziqli programmalash masalasi shartlaridagi bazis o'zgaruvchisi bo'lmagan har bir tenglamaga sun'iy ravishda bazis o'zgaruvchilar qo'shamiz va bu o'zgaruvchilarni maqsad funktsiyasiga (minimal qiymatni topish masalasi uchun) etarlicha katta bo'lgan musbat M koeffitsient bilan kiritamiz. Bunday o'zgaruvchilar «sun'iy bazis o'zgaruvchilar» deb ataladi. Hosil bo'lgan masala esa berilgan masalaga nisbatan kengaytirilgan masala deb ataladi. Masalani echish jarayonini simpleks jadvalda simpleks usul bilan bajaramiz.

Yuqorida aytilganlarni quyidagi misolni echish jarayonida ko'rsatamiz.

1- misol.

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4$$

Echilishi. Masalaning shartlaridagi tenglamalarda bazis o'zgaruvchilar yo'q. Har bir tenglamaga mos ravishda x_5, x_6 -

sun'iy bazis o'zgaruvchilarni qo'shamiz va maqsad funktsiyani (-1) ga ko'paytirib, quyidagi kengaytirilgan masalani hosil qilamiz.

$$F = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \ (min)$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5=3 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_6=3 \end{cases}$$

Kengaytirilgan masala uchun X=(0;0;0;0;3;3) boshlang'ich tayanch reja hisoblanadi. Keyingi hisoblashlarni quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz.

i	Ba-zis	S_b	P_0	-5	-3	-4	+1	M	M	a.k
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1 2	P_5 P_6	M M	3 3	1 2	$\boxed{3}$ 2	2 1	2 1	1 0	0 1	1^* 3/2
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		6M	3M+5	$5M+3^*$	3M+4	3M-1	0	0	
1 2	P_2 P_6	-3 M	1 1	1/3 $\boxed{4/3}$	1 0	2/3 -1/3	2/3 -1/3	1/3 -2/3	0 1	3^* 3/4
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		M-3	$4/3M+4^*$	0	-M/3+2	-M/3-3	-5/3M-1	0	
1 2	P_2 P_1	-3 -5	3/4 3/4	0 1	1 0	$\boxed{3/4}$ -1/4	3/4 -1/4	1/2 -1/2	-1/4 3/4	1^* —
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-6	0	0	3^*	-2	-M+1	-M-3	
1 2	P_3 P_1	-4 -5	1 1	0 1	4/3 1/3	1 0	1 0	2/3 -1/3	-1/3 2/3	
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-9	0	-4	0	-5	-M-1	-M-2	

Oxirgi qadamdan ko'ramizki, masala yagona $X=(1;0;1;0;0;0)$ optimal echimga va $F_{min}=-9$ minimal qiymatga ega. Dastlabki berilgan masala echimi esa $X_{opt}=(1;0;1;0)$; $F_{max}=9$.

Mustaqil echish uchun masalalar.

Quyidagi chiziqli programmalash masalalarini sun'iy bazis usulida eching.

1.

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

$Ж: X_{опт} = (2{,}8; 2{,}4; 0{,}4)$

$F_{\max} = 7{,}2$

2.

$$F = 16x_1 + 10x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 90 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 70 \\ x_1 + x_2 = 20 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2$

$Ж: X_{опт} = (10;10)$

$F_{\min} = 260$

3.

$$F = 4 - 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$

$Ж: X_{опт} = (0;1;1;0,0)$

$F_{\max} = 6$

4.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 + \frac{7}{2}x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$

$Ж: X_{опт} = (0;6;0;6)$

$F_{\max} = 27$

5.

$$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$

$Ж: X_{опт} = (3;1;0;0)$

$F_{\min} = 1$

6.

$$F = -2x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$

$Ж: X_{опт} = (0;125;25;0)$

$F_{\min} = 475$

7.

$$F = 3x_1 + 6x_2 + 30x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

$Ж: X_{опт} = (2;3;0)$

$F_{\min} = 24$

8.

$$F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

$Ж: X_{опт} = (0;0;14)$

$F_{\max} = 42$

9. 1- mashg'ulotdagi masalalarni simpleks usulini qo'llab eching.

7- mashg'ulot

Chiziqli programmalashda ikkilanish nazariyasi.

Ikkilangan masalalarning juftligi quyidagi ko'rinishlardan birida bo'lishi mumkin..

T/R	Berilgan masala.	Ikkilangan masala.
Simmetrik bo'lmagan masalalar		
I	$F=CX\to min$ $AX=B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to max$ $YA\leq C$
II	$F=CX\to max$ $AX=B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to min$ $YA\geq C$
Simmetrik masalalar		
III	$F=CX\to min$ $AX\geq B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to max$ $YA\leq C$ $Y\geq 0$
IV	$F=CX\to max$ $AX\leq B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to min$ $YA\geq C$ $Y\geq 0$

Demak, berilgan masala uchun ikkilangan masala tuzishdan avval, berilgan masalaning shartlari sistemasini tegishli shaklga keltirib, keyin ikkilangan masala tuziladi.

1-masala. Ushbu

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Echish: Qaralayotgan masala simmetrik bo'lmagan masalaning II shakliga doir. Ikkilangan masalada o'zgaruvchilarning soni berilgan masala sistemasining tenglamalari soniga teng, ya'ni uchga teng. Ikkilangan masala maqsad funktsiyasining koeffitsientlari berilgan masala tenglamalar sistemasining ozod hadiga, ya'ni 12, 24 va 18 sonlariga teng bo'ladi.

Berilgan masala funktsiyasining maksimumini topish talab qilingan bo'lib, shartlar sistemasi faqat tenglamalardan iborat. Shu sababdan ikkilangan masalada maqsad funktsiyasining minimumi topiladi va uning o'zgaruvchilari ixtiyoriy qiymatlarni (jumladan, manfiy qiymatlarni ham) qabul qilishi mumkin bo'ladi.

Berilgan masalaning har uchala o'zgaruvchilari faqat nomanfiy qiymatlar qabul qilganligi sababli ikkilangan masala shartlar sistemasi "≥" ko'rininshdagi tengsizlikdan iborat bo'ladi. Binobarin, berilgan masala uchun ikkilangan masala quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3 \end{cases}$$
$$G = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min$$

2-masala. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Echish: Bu masala shu ko'rinishda jadvaldagi berilgan masalalarning hech biriga mos kelmaydi, lekin birinchi tengsizlikni (-1) ga ko'paytirib, Sh shakldagi simmetrik masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

Bu masalaning ikkilangan masalasi quyidagi masala bo'ladi:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$G = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to max$$

3-masala. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Echish: Bu masala ham jadvalda berilgan masalalarning hech biriga mos kelmaydi. Qaralayotgan masalani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$
$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

Bu IV shaklda berilgan simmetrik masalaga mos keladi. Shu sababdan ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge -4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$G = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to min$$

Birinchi ikkilanish teoremasi. Agar ikkilangan masalalardan biri optimal echimga ega bo'lsa, ikkinchisi ham optimal echimga ega bo'ladi va

$$F_{max}(X_{opt})=G_{min}(Y_{opt})$$

$$X_{opt}=D^{-1}B_0 \quad \text{va} \quad Y=C_bD^{-1}$$

Bunda D – simpleks usuldagi oxirgi bazis vektorlar komponentalaridan tuzilgan matritsa;

V_0 - berilgan masalaning ozod hadlaridan tuzilgan vektor;

S_b - oxirgi bazis o'zgaruvchilarning maqsad funktsiyadagi koeffitsientlaridan tuzilgan vektor.

Agar masalalardan birining maqsad funktsiyasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda ikkinchisi echimga ega bo'lmaydi.

4-masala. Ushbu

$$F = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$
$$-4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$$
$$3x_2 + x_5 + x_6 = 5$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,6}$$

Masala uchun ikkilangan masala tuzilsin va uning echimi topilsin.
Echish. Ikkilangan masalaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$
$$G = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

Berilgan masalani simpleks usulda echamiz.

B	S_b	A_0	0	1	0	-1	-3	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	1	1	2	0	-1	$\boxed{1}$	0
A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
Δ_J		0	0	-1	0	1	3	0
A_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
A_3	0	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
Δ_J		-3	-3	-7	0	4	0	0
A_5	-3	4	2	2	1	0	1	0
A_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	1	-2	3	-1	0	0	1
Δ_J		-15	-7	1	-4	0	0	0
A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
A_4	-1	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$
A_2	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
Δ_J		$-\frac{46}{3}$	$-\frac{19}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$

Berilgan masalani optimal echimi: X_{opt}=(0; 1/3; 0; 11/3; 4; 0) bo'ladi. Aytib o'tamizki, D=(A$_5$, A$_4$,A$_2$)=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ va $D^{-1}B_0$=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Birinchi ikkilanish teoremasi asosida ikkilangan masalaning optimal echimini topamiz:

Y_{opt}=S_b*D^{-1}=$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Ya'ni, ikkilangan masalaning optimal echimi Y_{opt} ning i-komponentasini topish uchun simpleks jadvalning oxirgi satridagi boshlang'ich bazis vektorlari ustuniga mos keluvchi sonlarga qarash kerak.

$y_1 = -\frac{19}{3};\ y_2 = -\frac{11}{3}\ ;\ y_3 = -\frac{1}{3}$

Eslatma: amaliyotda ikkilangan masalalar juftidan hisoblash uchun qulay bo'lgan masala tanlab olinib, u uchun simpleks usul qo'llanadi.

5-masala. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

masala berilgan bo'lsin.

Echish: Bu masalaga ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2 \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \le 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{cases}$$
$$G = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \to \max$$

Berilgan masalani simpleks usulda echish uchun 4 ta qo'shimcha va 1 ta sun'iy o'zgaruvchi kiritish zarur bo'ladi. Boshlang'ich simpleks jadval 6 satr va 9 ustundan iborat bo'ladi.

Ikkilangan masalani echish uchun esa 3 ta qo'shimcha o'zgaruvchi kerak bo'ladi. Uning boshlang'ich simpleks jadvali 4 satr va 8 ustundan iborat bo'ladi.

Bu holda albatta ikkilangan masalani echish maqsadga muvofiqdir. Ushbu masalani simpleks usul bilan echib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

B	S_b	A_0	2	3	6	3	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
A_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
Δ_J		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
A_3	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
A_7	0	5	3	2	0	2	2	0	1
Δ_J		6	10	-9	0	9	6	0	0
A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
A_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
A_7	0	4	3	0	0	3	3	-1	1
Δ_J		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Ikkilangan masalaning optimal echimi $Y_{opt}=(0;\ 1/2;\ 3/2;\ 0)$, $G_{max}=21/2$ bo'ladi.
Berilgan masalaning echimi esa $X_{opt}=(3/2;\ 9/2;\ 0)$, $F_{min}=21/2$.

Mustaqil echish uchun misollar.

Quyidagi masalalar uchun ikkilangan masalalar tuzilsin va ularning echimi topilsin.

$$1.\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J: $Y_{opt}=(2/3;\ 0;\ 0;\ 7/3)$; $G_{min}=13$

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$X_{opt}=(4;\ 1)$; $F_{max}=13$

$$2.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \ge 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

J: $Y_{opt}=(1/9;\ 13/9;\ 0)$; $G_{min}=110/9$

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \to \min$$

$X_{opt}=(0;\ 10/3;\ 8/9)$; $F_{max}=110/9$

$$3.\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 9\\ x_1-2x_2\le 2\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$
$$F=x_1-x_2\to max$$

J: Ikkilangan masala echimga ega emas.

$$4.\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 3\\ x_1+2x_2\le 4\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\end{cases}$$
$$F=6x_1+8x_2+x_3\to \max$$

J: $Y_{opt}=(4;\ 2)$; $G_{min}=20$

$X_{opt}=(2;\ 1;\ 0)$; $F_{max}=20$

$$5.\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+2x_4\le 2\\ 3x_1+x_2+3x_3+4x_4\le 5\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0\end{cases}$$
$$F=27x_1+10x_2+15x_3+28x_4\to \max$$

J: $Y_{opt}=(12;\ 1)$; $G_{min}=29$

$X_{opt}=(0;\ 0;\ 1;\ 1/2)$; $F_{max}=29$

$$6.\begin{cases}2x_1-x_2-x_3\ge 3\\ x_1+x_2+x_3\ge 2\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\end{cases}$$
$$F=2x_1-3x_2\to \max$$

J: Ikkilangan masala echimga ega emas.

$$7.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

J: Y_{opt}=(7/9; 0; 13/9); G_{min}=66

$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$$

X_{opt}=(18; 6; 0;); F_{max}=66

Quyidagi masalalar uchun ikkilangan masala tuzilsin va uning echimi topilsin:

$$8.\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

J: Y_{opt}=(0; 0; 7/5); G_{max}=21

$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$$

$$9.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

J:Y_{opt}=(7/11; 1/11; 0); G_{min}=226/11

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$

$$10.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

J: Y_{opt}=(0; 1; 0); G_{min}=28

$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

8- mashg'ulot

Iqtisodiy masalalar echimini tahlil qilish.

ChMPni optimal echimiga korxonada vujudga keladigan real jarayonlar jiddiy ta'sir qiladi. Bunday iqtisodiy jara-yonlarga quyidagilar kiradi:

1) resurslar zahirasining o'zgarishi;
2) mahsulot ishlab chiqarishda yangi texnologik usulni qo'llash natijasida xom ashyolar sarflanishining kamayishi;
3) korxona narx siyosatida yuz beradigan o'zgarish;
4) yangi tur mahsulot ishlab chiqarishni rejalashtirish va h.k.

Yuqorida keltirilgan jarayonlarni optimal echimga bo'lgan ta'sirini tahlil qilishda ikkilanish nazariyasining ikkinchi teoremasidan foydalaniladi.

Teorema. Agar berilgan masalaning i- chegaralovchi shartilari uning optimal echimida qat'iy tengsizlikka aylansa, u holda ikkilangan masalaning optimal echimida i- komponenta nolga teng bo'ladi; agar ikkilangan masalaning optimal echimida i- komponenta musbat bo'lsa, u holda berilgan masalaning i- sharti optimal echimda tenglikka aylanadi.

Bundan ko'rinadiki: optimal echimning bahosi - resurslar tanqisligi darajasining o'lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xom ashyo «tanqis (difitsit) xom ashyo» deyiladi. Bunday xom ashyoni oshirib sarf qilish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xom ashyo «notanqis (difitsit bo'lmagan) xom ashyo» hisoblanadi. Bunday xom ashyolarni ikkilangan bahosi nolga teng bo'ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshirishga ta'sir qilmaydi.

Shunday qilib:

1) ikkilangan baholar resurslarning tanqislik o'lchovi bo'ladi. Ikkilangan masala optimal echimining y_i komponentasi i - resurs zahirasining bahosi bo'ladi; y_i qancha katta bo'lsa, resurs tanqisligi shuncha yuqori ekanligi ko'rsatadi. Notanqis (ortiqcha) resurs uchun $y_i=0$ bo'ladi.

2) ikkilangan baholar resurslar zahirasining o'zgarishi maqsad funktsiyaga qanday ta'sir qilishini ko'rsatadi:

$$\Delta F = y_i \bullet \Delta b_i$$

bunda: y_i – i - resursning ikkilangan bahosi;

Δb_i - i -resurs zahirasining orttirmasi;

ΔF - maqsad funktsiyasining o'zgarishi.

Masala. Korxona ikki xil M_1 va M_2 mahsulotlar ishlab chiqarish uchun ikki tur A va V xom ashyolardan foydalanadi. Bir birlik M_1 va M_2 xil mahsulotga sarf qilinadigan turli xom ashyolar normasi, mahsulotning bir birligidan olinadigan daromad hamda xom ashyolar zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom ashyo turi	Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom ashyo normasi		Xom ashyolar zahirasi
	M_1	**M_2**	
A	2	3	9
V	3	2	13
Bir birlik mah-sulotdan olinadigan daromad	3	4	

Ish tajribasi shuni ko'rsatadiki, sutkasiga M_1 mahsulotga bo'lgan talab M_2 mahsulotga bo'lgan talabdan bir birlikdan ko'p bo'lmaydi. Bundan tashqari sutkasiga M_2 mahsulotga bo'lgan talab 2 birlikdan ko'p bo'lmaydi.

Mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

Echish: Masalaning matematik modeli:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

(A xom ashyo)

(V xom ashyo)

(talab)

(talab)

Ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \ge 4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$G = 9y_1 + 13y_2 + y_3 + 2y_4 \to min$$

bo'ladi.

Berilgan masalaning echimini topish maqsadga muvofiqdir. Bu masalani simpleks usulda echamiz.

			3	4	0	0	0	0
B	S_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	9	2	3	1	0	0	0
A_4	0	13	3	2	0	1	0	0
A_5	0	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0	0
A_3	0	7	0	5	1	0	-2	0
A_4	0	10	0	5	0	1	-3	0
A_1	3	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		3	0	-7	0	0	3	0
A_2	4	7/5	0	1	1/5	0	-2/5	0
A_4	0	3	0	0	-1	1	-1	0
A_1	3	12/5	1	0	1/5	0	3/5	0
A_6	0	3/5	0	0	-1/5	0	2/5	1
Δ_j		64/5	0	0	7/5	0	1/5	0

Natijada ikkala masala uchun optimal echimlarni topamiz. Berilgan masala uchun:

$$X_{opt}=(12/5;\ 7/5) \qquad F_{max}=64/5=12{,}8$$

Ikkilangan masala uchun

$$Y_{opt}=(7/5;\ 0;\ 1/5;\ 0) \qquad G_{min}=64/5=12{,}8 \quad \text{bo'ladi.}$$

Ikkilangan masala echimida $y_2=y_4=0$, binobarin, II va IV resurslar notanqis resurslardir. II resurs (V xom ashyoning) ortiqchasi 3 birlikni ($x_4=3$) , IV resursning ortiqchasi esa 0,6 birlikni ($x_6=0{,}6$) tashkil qiladi.

Ikkilangan masala echimida $y_1=7/5$ va $y_3=1/5$. Demak, I va III resurslar to'la ishlatilgan, ya'ni ularning tanqis resurslar ekanligini ko'rsatadi. Qaralayotgan masalada A tur xom ashyo zahirasi $\Delta b_1=1$ birlikka oshirilsa, maqsad funktsiyasining qiymati 1,4 birlikka oshadi: $\Delta F=y_1\cdot\Delta b_1=\frac{7}{5}\cdot 1=1{,}4$

Agar ishlab chiqarishda A tur xom ashyodan bir birlik ortiqcha sarf qilinsa, uning ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Shu yangi rejaga muvofiq mahsulot ishlab chiqarilsa, daromad

$$F_{max}=12{,}8+1{,}4=14{,}2$$

ni tashkil qiladi.

Jadvalni A_4 ustuniga qarab xulosa chiqaramiz:

Yangi rejada M_1 va M_2 mahsulotlarning ishlab chiqarilishi 1/5=0,2 birlikka oshadi. Buning natijasida A tur xom ashyoni sarf qilishi bir birlikka ko'proq bo'ladi:

$$\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 3=1$$

Xuddi shuningdek, III resurs $\Delta b_3=1$ birlikka oshirilsa, ya'ni sutkasiga M_1 mahsulotga bo'lgan talab M_2 mahsulotga qaraganda 2 birlikdan ko'p bo'lmasligi qaralsa, maqsad funktsiyaning qiymati

$$\Delta F = y_3 \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2 \qquad \text{birlikka oshadi.}$$

Jadvaalni A_5 ustuniga qarab xulosa chiqaramiz:
Yangi rejada M_1 mahsulotni ishlab chiqarishi 3/5 birlikka oshadi va M_2 mahsulotniki esa 2/5 birlikka kamayadi. Natijada III tur resurs

$$1 \cdot \frac{3}{5} - 1 \cdot \left(-\frac{2}{5} \right) = 1 \qquad \text{birlikka ko'proq bo'ladi.}$$

Ikkilangan optimal baholarni ikkilangan masala shartlariga qo'yamiz:

$$2 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot 0 + \frac{1}{5} = 3$$

$$3 \cdot \frac{7}{5} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{5} + 0 = 4$$

shartlar tenglikka aylandi, ya'ni korxona har ikkala mahsulotni ham ishlab chiqarsa maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu ikkala mahsulotning ishlab chiqarilishi berilgan masalaning optimal echimida ham nazarda tutilgan.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1.Korxona 4 xil mahsulotni ishlab chiqarishi uchun 3 tur resurslardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilinadigan resurslar normasi, resurslarning zahiralari, hamda bir birlik mahsulot narxi quyidagi jadvalda berilgan.

Resurs turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi**				**Resurs-lar za-hirasi**
	A	**V**	**S**	**D**	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Bir birlik mahsulotning narxi	9	6	4	7	

Ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

I tur resurs zahirasi 60 birlikka kamaytirilib, II va III tur resurs zahiralari 120 va 160 birlikka oshirilganda mahsulot ishlab chiarishning eng katta daromadining o'zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

2.Korxona har xil A,V,S buyumlarni ishlab chiqarishi uchun 3 tur xom ashyolardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilingan xom ashyolar normasi, xom ashyolar zahiralari, hamda bir birlik mahsulotdan keladigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom ashyo turi	Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom ashyolar normasi (kg)			Xom ashyolar zahira-lari
	A	V	S	
I	18	15	12	360 kg
II	6	4	8	192 kg
III	5	3	3	180 kg
Bir birlik bu-yumdan olinadigan daromad	9	10	16	

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va III tur xom ashyolar zahiralari mos ravishda 30, 40 va 50 kg ga oshirilganda mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromadining o'zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

3.Uch xil A, V va S mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyolardan foydalanadi. Har bir xom ashyodan mos ravishda 180, 210 va 236 kg hajmdan ko'p bo'lmagan miqdorda ishlatish mumkin. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun har bir tur xom ashyolar sarfi, hamda bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turi	Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom ashyolar normasi (kg)		
	A	V	S
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Bir birlik buyumdan keladigan daromad	10	14	12

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va III tur xom ashyolar zahiralari mos ravishda 30, 40 va 50 kg ga oshirilganda maqsad funktsiya maksimumining o'zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

4.7- mashg'ulot masalalarining optimal echimini tahlil qiling.

Javoblar:

1. $\Delta F_{1\max} = 0; \quad \Delta F_{2\max} = 180; \quad \Delta F_{3\max} = 360; \quad \Delta F_{\max} = 540;$
2. $\Delta F_{1\max} = \dfrac{20}{3}; \quad \Delta F_{2\max} = \dfrac{200}{3}; \quad \Delta F_{3\max} = 0; \quad \Delta F_{\max} = \dfrac{220}{3};$
3. $\Delta F_{1\max} = -230; \quad \Delta F_{2\max} = 0; \quad \Delta F_{3\max} = 200; \quad \Delta F_{\max} = -30;$

9- mashg'ulot

Ikkilangan simpleks usul.

Ba'zan berilgan masalaning optimal echimini topish uchun ,avvalo, ikkilangan masalani echib, uning baholari asosida berilgan masalaning echimini topish mumkin bo'ladi. Masalan, 7-mashg'ulotning 5- masalasini echishda shunga amal qilgan edik. Ammo ikkilangan masalaga o'tish shart emas ekan.

Haqiqatdan ham, o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan A_j vektorlarning m tasi birlik vektorlar bo'lgan chiziqli programmalash masalasining boshlang'ich simpleks-jadvaliga qaraylik. Ustunlarida berilgan masala va satrlarida esa ikkilangan masala yozilgan ekanligini osonlik bilan payqash mumkin. Bundan tashqari, berilgan masalaning baholari c_j va ikkilangan masalaning baholari esa b_i bo'ladi. Shu sababdan berilgan masala yozilgan simpleks-jadval asosida ikkilangan masalani echsak bo'lar ekan. Natijada ikkilangan masalaning optimal echimi va u bilan birgalikda berilgan masalaning optimal echimi topiladi. Bunday usul ikkilangan simpleks usul deyiladi.

Simpleks usul va ikkilangan simpleks usulda boshlang'ich jadval bir-biridan farq qilmaydi.

Simpleks usulda jadvalni almashtirish uchun (yangi echimni topish uchun) oldin bazisga kiritiladigan vektor tanlanib, so'ngra bazisdan chiqadigan vektor aniqlanar edi. Ikkilangan simpleks usulda eng avvalo bazisdan chiqariladigan vektor

$$\min_{b_i<0} b_i = b_l$$

shart asosida tanlanadi. Bunday vektor A_l vektori bo'ladi. So'ngra bazisga kiritiladigan vektor tanlanadi. Buning uchun

$$\min_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$$

ni topamiz. Agar bu minimumga j=r da erishsa, unda A_r vektor bazisga kiritiladi, ya'ni a_{lr} hal qiluvchi element bo'ladi. Simpleks jadval oddiy simpleks usuldagidek almashtiriladi. Bu jarayon A_0 ustunida birorta ham manfiy son qolmaguncha davom ettiriladi. Natijada berilgan masala hamda ikkilangan masalaning optimal echimi topiladi. Agar biror qadamda simpleks jadvalining i-satrida A_0 ustunidagi b_l element manfiy son bo'lib, bu satrda boshqa birorta ham manfiy element bo'lmasa, berilgan masala musbat echimga ega bo'lmaydi.

Masala. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$$

masalani ikkilangan simpleks usulda eching.

Echish. Bu masalani quyidagi ko'rinishga keltirish qiyin emas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$$

A_3, A_4, A_5 vektorlarni bazis sifatida tanlab olib boshlang'ich simpleks jadvalni tuzamiz:

B	S_b	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	8	1	1	1	0	0
A_4	0	-4	-1	1	0	1	0
A_5	0	-6	-1	-2	0	0	1
Δ_J		-16	-1	-1	0	0	0

A_0 ustunda ikkita manfiy sonlar (-4;-6) bor . Bazisdan chiqariladigan vektor min(-4;-6)=-6 sharti asosida tanlanadi. Ya'ni, A_5 vektorni bazisdan chiqariladi. Bazisga kiritiladigan vektorni aniqlash uchun

$$\min_{a_{3j}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{3j}}\right) = \min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}$$

ni topamiz. Demak, bazisga A_2 vektorni kiritamiz. Natijada simpleks javdval almashadi.

B	S_b	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	5	1/2	0	1	0	1/2
A_4	0	-7	-3/2	0	0	1	1/2
A_2	1	3	1/2	1	0	0	1/2
Δ_J		-13	-1/2	0	0	0	-1/2

A_0 vektorning ustunida -7 manfiy son bor va bu satrning boshqa elementlari ichida bitta manfiy son -3/2 mavjud. Demak, bazisdan A_4 ni chiqarib, uning o'rniga A_1 ni kiritamiz:

B	S_b	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
A_1	-1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3
A_2	-1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3
Δ_J		-32/3	0	0	0	-1/3	-2/3

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, berilgan va ikkilangan masalalarning optimal echimlari mos ravishda X=(14/3; 2/3; 8/3; 0) va Y=(2; 1/3; 2/3) bo'lib, $F_{\min} = G_{\max} = -\dfrac{32}{3}$ bo'ladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

Quyidagi masalalarni ikkilangan simpleks usulida eching.

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$ $Ж: X = (6;2;0);\ F_{\max} = 8$

$$F(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$ $Ж: X = (3;0;0;\frac{1}{2});\ F_{\max} = -\frac{29}{2}$

$$F(x) = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

4. $$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$ $Ж: X = (8;2;0;0);\ F_{\min} = 52$

$$F(x) = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

5. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$ $Ж: X = (2;0;0;5);\ F_{\min} = 12$

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$$

6. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \geq 24 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$ $Ж: X = (3;0;0;0;9;0);$ $F_{\max} = -75$

$$F(x) = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \rightarrow \max$$

7. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 24 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \geq 12 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$ $Ж: X = (0;3;10;0;19);\ F_{\max} = 11$

$$F(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

8. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 16 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$F(x) = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$$

Ж : $X = (4;0;4;0;26);\ F_{\max} = 48$

9. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$$F(x) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$$

Ж : $X = (0;12;0;6);\ F_{\max} = 126$

10. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$$

Ж : Берилган масала ечимга эга эмас.

10- mashg'ulot

Transport masalasini echishda
potentsiallar usuli.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalash masalasining optimal echimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch echimni qurishdan boshlanadi. Transport masalasini boshlang'ich tayanch echimini ilgari foydalangan usullar yordamida topish mumkin, biroq bu ayrim qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Transport masalasini boshlang'ich tayanch echimini qurishining bir nechta oddiy sxemalari mavjud. Dastlab yopiq modeli transport masalasini qaraymiz.

1. <u>Shimoli- g'arbiy burchak usuli.</u>

Rejalashtirish jadvalida yo'l harajatini hisobga olmay B_1 iste'molchining talabini dastlab A_1 ta'minotchi hisobidan qondiramiz. Buning uchun min (a_1,b_1) ni (A_1 ,B_1) katakchaning chap pastki burchagiga yozamiz, ya'ni x_{11}= min (a_1 ,b_1). Agar $a_1 < b_1$ bo'lsa, B_1 ning ehtiyojini to'la qondirish uchun (A_2 ,B_1) katakchaga etishmaydigan yuk birligini A_2 dan olib yozamiz va h.k. Bu jarayonni (A_m ,B_n) katakchaga etguncha davom ettiramiz. Natijada band katakchalar soni m+n-1 dan oshmaydi va tuzilgan echim tayanch echim bo'ladi. Agar band katakchalar soni m+n-1 ga teng bo'lsa, buzilmagan tayanch echim hosil bo'ladi.

<u>Misol.</u> Ushbu transport masalasining boshlang'ich echimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Talab hajmi	150	120	80	50	

(1)

Echish. Boshlang'ich tayanch echimini shimoli -g'arbiy burchak usuli bilan topamiz. Buning uchun rejalar matritsasini quyidagi ko'rinishda yozamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Bu jadvalda a_i bilan ta'minotchilardagi mahsulot zahirasini, b_j bilan esa iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabini belgiladik. Topilgan tayanch reja quyidagidan iborat:

$$X=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Band katakchalar soni rosa m+n-1=3+4-1=6 ga teng. Tuzilgan boshlang'ich echim buzilmagan tayanch echim (reja) bo'ladi.

Tuzilgan rejaga mos keluvchi xarajatni hisoblaymiz.

F(X)=100*3+50*1+80*4+40*8+80*12+50*7=2300

2. Minimal xarajatlar usuli.

Bu usulda boshlang'ich echim qurish uchun avval yo'l xarajati eng kichik bo'lgan katakchaga a_i va b_i lardan kichigi yoziladi va navbatdagi eng kichik xarajatli katakchaga o'tiladi va h.k. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich echimni tsikllanishga tekshirish shart.

<u>Misol.</u> Yuqorida berilgan transport masalasining boshlang'ich echimini "minimal xarajatlar " usuli yordamida tuzing.

Echish.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	20 ^{3}	80 ^{5}	^{7}	^{11}
130	130 ^{1}	^{4}	^{6}	^{2}
170	^{5}	40 ^{8}	80 ^{12}	50 ^{7}

$$X=\begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Bunda ham band katakchalar soni 6 ga teng bo'ldi, ya'ni tuzilgan boshlang'ich echim buzilmagan tayanch echim bo'lib chiqdi. Echim tuzilayotganda yo'l xarajati inobatga olindi. Shu sababdan tuzilgan rejaning xarajati oldingi echim xarajatidan kichik va optimal echimga yaqinroq bo'ladi. Haqiqatan ham

F(X)=20*3+80*5+130*1+40*8+80*12+50*7=2200

Boshlang'ich echim qurishning yana boshqa usullari ham mavjud.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan usullar yordamida boshlang'ich tayanch echim qurish mumkin.

Tuzilgan boshlang'ich tayanch echimni potentsiallar usuli yordamida optimal echimgacha etkazish mumkin.

Potentsiallar usuli.

<u>Teorema.</u> Agar transport masalasining $X=(x_{ij})$ echimi optimal bo'lsa, unga quyidagi shartlarni

$U_i + V_j = C_{ij}$, agar $x_{ij}>0$,

$U_i + V_j \leq C_{ij}$, agar $x_{ij}=0$.

$i=1,2,....,m; \quad j=1,2,.....,n.$

qanoatlantiruvchi m+n ta sonlar mos keladi.

U_i va V_j sonlar mos ravishda “ta’minotchi” va “iste’molchi”-larning potentsiallari deyiladi.

Shunday qilib, echimning optimalligini tekshirish uchun eng avvalo potentsiallar sistemasini qurish zarur ekan.

Potentsiallar sistemasini qurish.

Potentsiallar sistemasini barcha band katakchalar uchun

$$U_i + V_j=C_{ij}$$

ko’rinishda tuzamiz.

Potentsiallar sistemasini faqat buzilmagan tayanch echim uchun qurish mumkin. Bunday echim uchun m+n-1 band katakcha mos keladi. Noma’lum potentsiallar soni esa m+n ga teng. Ya’ni potentsiallarni topish uchun m+n noma’lumli m+n-1 bog’liqmas tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema aniqmas sistema bo’ladi. Shuning uchun biror noma’lumga (odatda U_1 ga) nol qiymat beriladi ($U_1=0$). Bundan boshqa potentsiallar bir qiymatli holda aniqlanadi. So’ngra har bir bo’sh katakcha uchun mos potentsiallar $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} \leq 0$ shartni qanoatlantirishini tekshiramiz. Agar bu shartlar barcha bo’sh katakchalarda bajarilsa, topilgan tayanch echim optimal bo’ladi. Agarda bu shartlar ayrim bo’sh katakchalarda bajarilmasa, ya’ni, $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} > 0$ bo’lsa, u holda tayanch echim uchun optimallik sharti bajarilmaydi. Undan boshqa tayanch echimga o’tish kerak bo’ladi. Navbatdagi tayanch echimga o’tish uchun Δ_{ij} larning eng kattasiga mos kelgan katakcha to’ldiriladi. Buning uchun unga θ son qo’shiladi va shu katakchadan boshlab vertikal va gorizontal yo’nalishlar bo’ylab band katakchalardagi taqsimotlardan θ ni ayirib va qo’shib borib yopiq kontur chiziladi. Ko’pburchakning uchlariga ”$+\theta$ ” ishorali katakchadan boshlab ketma-ket “-θ ” va ”$+\theta$ ” belgilar qo’yib chiqiladi. So’ngra “- ” ishorali katakchalardagi taqsimotlari ichidan eng kichigini θ ning son qiymati deb qabul qilinadi va u ”+” ishorali katakchalarga qo’shiladi va “-” manfiy ishorali katakchalardan ayiriladi. Natijada band kataklar soni m+n-1 ta bo’lgan yangi tayanch reja hosil bo’ladi. Bunda ayrim band katakchalardagi yuk birligi nol bo’lib qolishi mumkin.

<u>Misol.</u> Yuqorida keltirilgan transport masalasini potentsiallar usuli bilan eching.

<u>Echish.</u> Bu masalaning shimoli-g’arbiy burchak usuli bilan topilgan tayanch echimi uchun mos potentsiallar sistemasini ko’raylik.

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 $100-\theta$	5 1	7 $+\theta$ 3	11 -6	0
130	1 $50+\theta$	4 $80-\theta$	6 2	2 1	-2
170	5 0	8 $40+\theta$	12 $80-\theta$	7 50	2
V_j	3	6	10	5	$\theta=80$

$$X=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0 & 0\\ 50 & 80 & 0 & 0\\ 0 & 40 & 80 & 50\end{pmatrix}$$

$F(X_0)=2300$

$$\begin{cases} U_1+V_1=3 \\ U_2+V_1=1 \\ U_2+V_2=4 \\ U_3+V_2=8 \\ U_3+V_3=12 \\ U_3+V_4=7 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &U_1=0 \quad V_1=3 \\ &U_2=1-V_1=1-3=-2 \\ &V_2=4-U_2=4+2=6 \\ &U_3=8-V_2=8-6=2 \\ &V_3=12-U_3=12-2=10 \\ &V_4=7-U_3=7-2=5 \end{aligned}$$

Endi bo'sh kataklar uchun optimallik shartini tekshiramiz:

$\Delta_{12}=(U_1+V_2)-S_{12}=1$; $\Delta_{23}=(U_2+V_3)-S_{23}=2$

$\Delta_{13}=(U_1+V_2)-S_{13}=3$; $\Delta_{24}=(U_2+V_4)-S_{24}=1$

$\Delta_{14}=(U_1+V_4)-S_{14}=-6$; $\Delta_{31}=(U_3+V_1)-S_{31}=0$

Ko'rinib turibdiki Δ_{ij} lar ichida musbatlari bor. Demak, bu reja optimal emas. Yangi tayanch rejaga o'tamiz:

max $\{3;2;1\}=3=\Delta_{13}$. Demak, jadvalda (A_1,B_3) katakchaga "$+\theta$" belgi kiritamiz va yopiq kontur yasaymiz. "$-\theta$" belgini katakchalardagi taqsimotlari ichidagi eng kichigini tanlab uni θ ning son qiymati deb qabul qilamiz.

$\theta=\min\{100,80\}=80$

$\theta=80$ ni "+" ishorali katakchalarga qo'shib va "-" ishorali katakchalardan ayirib, yangi tayanch reja tuzamiz:

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	20 ^{3}	^{5} 1	80 ^{7}	^{11} $\boxed{-6}$	0
130	130 ^{1}	0- θ ^{4}	^{6} -1	+ θ ^{2} 1	-2
170	^{5} 0	120+ θ ^{8}	^{12} -3	50- θ ^{7}	2
V_j	3	6	7	5	θ =0

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$F(X_1)=2060$

X_1-aynigan tayanch reja bo'lmasligi uchun (A_2,V_2) va (A_3,V_3) katakchalardan bittasini, ya'ni harajati katta bo'lgan (A_3,V_3) katakchani bo'sh katakchaga aylantirib, (A_2,V_2) katakchadagi taqsimotni esa 0 ga teng deb qabul qilamiz va bu katakchani band katakcha deb qaraymiz, hamda potentsial tenglamalar tuzib, potentsiallarning son qiymatini topamiz:

$U_1+V_1=3;$	$U_1=0;$	$V_1=3;$
$U_1+V_3=7;$	$U_2=-2;$	$V_3=7;$
$U_2+V_1=1;$	$U_3=2;$	$V_2=6,$
$U_2+V_2=4;$		
$U_3+V_2=8$		
$U_3+V_4=7$		

Endi bo'sh katakchalar uchun optimallik shartini tekshiramiz:

$\Delta_{12}= (U_1+V_2)- S_{12} =1;$
$\Delta_{14}= (U_1+V_4)-S_{14} =-6;$
$\Delta_{23}= (U_2+V_3)-S_{23}=-1;$
$\Delta_{31}= (U_3+V_1)- S_{31} =0;$
$\Delta_{33}= (U_3+V_3) -S_{33} =-3.$
$\Delta_{24}= (U_2+V_4)-S_{24} =1;$

X_1 reja optimal emas, chunki $\Delta_{31}=\Delta_{12}=1>0$. Demak, jadvaldagi (A_3,V_1) va (A_1,V_2) katakchalardan harajati kamiga "+θ" belgi qo'yib, yopiq ko'pburchak yasaymiz va θ ni topamiz.

$$\theta=\min\{50,0\}=0$$

ya'ni tayanch reja tuzamiz.

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	^{3} 20	^{5} 0	^{7} 80	^{11} -7	0
130	^{1} 130 $-\theta$	^{4} -1	^{6} -1	^{2} 0+ θ	-2
170	^{5} $+\theta$ 1	^{8} 120	^{12} -2	^{7} 50 - θ	3
V_j	3	5	7	4	θ =50

$$X_2=\begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$F(X_2)=2060$

Topilgan yangi X_2 reja optimal echim bo'lmaydi, chunki

$\Delta_{31}=(U_3+V_1)-S_{31}=1>0$;

Navbatdagi tayanch echimga o'tish uchun (A_3,V_1) katakchaga «+θ» belgi qo'yib, yopiq kontur tuzamiz va θ=50 ni topamiz.

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	^{3} 20 - θ	^{5} + θ 1	^{7} 80	^{11} -7	0
130	^{1} 80	^{4} 0	^{6} -1	^{2} 50	-2
170	^{5} 50 +θ	^{8} 120-θ	^{12} -3	^{7} -1	2
V_j	3	6	7	4	θ =20

$$X_3=\begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F(X_3)=2010$

hosil bo'lgan tayanch reja optimal echim bo'lmaydi, chunki $\Delta_{12}=1>0$. Yangi tayanch echimga o'tish uchun (A_1,V_2) katakchaga «+θ» belgi qo'yamiz va yopiq kontur tuzib θ =20 ekanligini aniqlaymiz va yangi X_4 rejani topamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50	U_i
100	^{3} -1	^{5} 20	^{7} 80	^{11} -8	0
130	^{1} 80	^{4} 0	^{6} 0	^{2} 50	-1
170	^{5} 70	^{8} 100	^{12} -2	^{7} -1	3
V_j	2	5	7	3	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F(X_4)=1990$

X_4 aynimagan tayanch echim. Bu echim optimal echim bo'ladi, chunki u uchun optimallik shartlarini barchasi bajariladi:

$\Delta_{11}= (U_1+V_1)- S_{11} =-1;$
$\Delta_{14}= (U_1+V_4)-S_{14} =--8;$
$\Delta_{22}= (U_2+V_2)-S_{22}=0;$
$\Delta_{23}= (U_2+V_3)- S_{23} =0;$
$\Delta_{33}= (U_3+V_3) -S_{33} =-2.$
$\Delta_{34}= (U_3+V_4)-S_{34} =-1;$
Demak, $X_4= X_{opt}$; $F_{min}=F(X_4)=1990$.

Mustaqil echish uchun masalalar

Quyidagi transport masalalarining optimal echimi topilsin.

1.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi.**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
Talab hajmi	70	40	70	45	

2.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi.**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	8	10	20	1	50
Talab hajmi	75	80	60	85	

3.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi.
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190
A_3	3	5	8	9	90
Talab hajmi	80	60	170	80	

4.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi.
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Talab hajmi	40	60	80	60	

5.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi.
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Talab hajmi	30	30	10	20	

6.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi.
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Talab hajmi	110	90	120	80	150	

7.

b_i / a_j	30	30	30
20	1	4	5
30	5	1	4
40	4	5	1

8.

b_i / a_j	120	80	50
130	1	7	6
70	6	1	1
50	7	6	1

9.

b_i \ a_j	150	150	100
200	1	3	4
150	4	3	1
50	3	1	4

10

b_i \ a_j	70	70	70
110	1	3	3
70	3	1	3
30	3	3	1

11.

b_i \ a_j	70	50	50
50	8	6	1
60	1	8	6
60	6	8	1

13.

b_i \ a_j	80	80	80
160	2	7	9
40	3	3	6
40	4	2	7

12.

b_i \ a_j	120	90	70
100	2	5	3
90	3	2	5
90	5	3	2

14.

b_i \ a_j	130	60	40
20	1	3	2
150	2	1	3
60	3	1	2

15.

b_i \ a_j	20	30	30	10
30	2	3	2	4
40	3	2	5	1
20	4	3	2	6

16.

b_i \ a_j	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4

17.

b_i \ a_j	70	90	110	150
120	2	5	4	6
130	3	11	3	2
150	3	10	3	2

18.

b_i \ a_j	250	300	350	300
350	2	3	4	3
300	2	3	1	2
550	3	1	3	4

Javoblar:

1. $X = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 0 & 35 \\ 55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 10 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 445$.

2. $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 665$.

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 1280$.

4. $X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 60 \\ 40 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 280$.

5. $X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 140$.

6. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 110 & 90 & 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 2300$.

11-mashg'ulot

"Ochiq modelli" transport masalasi. Xos («buzilgan») transport masalasi va uni echishning ε - usuli.

Yuqoridagi masalada talab va taklifning (zahira hajmining) umumiy miqdorlari teng bo'lgan edi. Bunday masalalarni "yopiq modelli" transport masalasi deyiladi. Aks holda masala "ochiq modelli" transport maasalasi deyiladi. Bunday masalani optimal echimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potentsiallar usuli qo'llaniladi.

"Ochiq modelli" masalani yopiq modelga keltirish uchun "soxta ta'minotchi yoki iste'molchi" kiritiladi, ularning zahirasi yoki talab hajmi $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$ yoki $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$ bo'ladi. "Soxta ta'minotchidan " real iste'molchiga yoki real ta'minotchidan "soxta iste'molchiga" amalda yuk tashilmagani uchun yo'l harajatlari nolga teng deb olinadi.

Misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yopiq modelli transport masalasiga aylantiring va uning optimal echimini toping.

b_i / a_j	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Bu masalada

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 \ \rangle \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 13$$

Shuning uchun talabi

$$b_6 = 16-13=3$$

bo'lgan «soxta iste'molchi»ni kiritamiz va rejalar jadvalini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

b_i / a_j	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Hosil bo'lgan yopiq modelli masalani potentsiallar usulini qo'llab echamiz va 7- qadamda quyidagi optimal echimni topamiz:

b_i \ a_j	3	3	3	2	2	3
4	^{3}	^{2} 1	^{1} 3	^{2}	^{3}	^{0}
5	^{5}	^{4}	^{3}	^{1} 2	^{1} 2	^{0} 1
7	^{0} 3	^{2} 2	^{3}	^{4}	^{5}	^{0} 2

Javob: $x_{12}=1$; $x_{13}=3$; $x_{24}=2$; $x_{25}=2$; $x_{26}=1$; $x_{31}=3$; $x_{32}=2$.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{F}(\mathrm{X}_{\text{опт}}) = 13$$

Demak, ta’minotchilardagi mahsulotlarni eng kam xarajat sarf qilib iste’molchilarga taqsimlash uchun 2- ta’minotchida 1 birlik va 3- ta’minotchida 2 birlik mahsulot taqsimlanmasdan qolishi kerak ekan.

Xos («buzilgan») transport masalasi va uni echishning ε - usuli.

Agar transport masalasining tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni k<n+m-1 bo’lsa, bunday reja xos (“buzilgan”) reja bo’ladi. Bunday rejani tuzatish uchun unga n+m-1- k ta nol element kiritish mumkin. Kiritilgan nol elementlarga mos keluvchi vektorlar o’zaro chiziqli erkli bo’lishi kerak. Bunga erishish uchun quyidagi ε - usulni qo’llash kerak.

Odatda transport masalasidagi a_i va b_j larning xususiy yig’indilari teng bo’lsa, u holda ixtiyoriy usul bilan topilgan tayanch reja “buzilgan” bo’ladi. Demak, xoslik holatini oldini olish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig’indilarning teng bo’lmasligiga erishish kerak. Buning uchun esa etarlicha kichik ε>0 son olib, a_i va b_j larni quyidagicha o’zgartiramiz:

$$\overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \qquad (i = \overline{1,m});$$

$$\overline{b_j} = b_j, \qquad (j = \overline{1,n-1});$$

$$\overline{b_n} = b_n + m\varepsilon,$$

Hosil bo’lgan masalani echib, X(ε) optimal reja topiladi. Undan ε =0 deb qabul qilib berilgan masalaning optimal echimi topiladi.

Misol.
Quyidagi transport masalasini ε - usulni qo'llab eching.

b_i / a_j	12	14	10	24
14	1	5	3	2
12	6	3	2	1
12	4	2	1	5
22	2	6	5	3

Ushbu masalada a_1+a_2 va v_1+v_2 xususiy yig'indilar o'zaro teng. Demak, bu masalaning tayanch echimi «buzilgan» bo'lishi mumkin. Buni oldini olish uchun masalani quyidagi ko'rinishda yozamiz va potentsiallar usulini qo'llab echamiz:

b_i / a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 0	3 1	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 1	2 $+\ \theta$ 1	1 $12+\varepsilon\ -\theta$	-1
$12+\varepsilon$	4 -6	2 $2+\varepsilon+\theta$	1 $10-\theta$	5 -6	-3
$22+\varepsilon$	2 0	6 $12-\varepsilon-\theta$	5 0	3 $10+2\varepsilon+\theta$	1
V_j	1	5	4	2	θ =10

b_i \ a_j	12	14	10	24+4ε	U_i
14+ε	1 12	5 0	3 0	2 2+ε	0
12+ε	6 -6	3 + θ 1	2 10	1 2+ε -θ	-1
12+ε	4 -6	2 12+ε	1 -1	5 -6	-3
22+ε	2 0	6 2-ε-θ	5 -1	3 20+2ε+θ	1
V_j	1	5	3	2	θ=2-ε

b_i \ a_j	12	14	10	24+4ε	U_i
14+ε	1 12	5 -1	3 0	2 2+ε	0
12+ε	6 -6	3 2-ε	2 10	1 3ε	-1
12+ε	4 -5	2 12+ε	1 0	5 -5	-2
22+ε	2 0	6 -1	5 -1	3 22+ε	1
V_j	1	4	3	2	

$$X_{опт}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 2+\varepsilon \\ 0 & 2-\varepsilon & 10 & 3\varepsilon \\ 0 & 12+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22+\varepsilon \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0 \quad \text{да}$$

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \qquad F(X_{опт}) = 132.$$

Mustaqil echish uchun masalalar

Quyidagi transport masalalarining optimal echimini toping va kerak bo'lgan hollarda ε - usulni qo'llang.

1.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Talab hajmi	130	220	60	70	

2.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Talab hajmi	80	80	60	80	

3.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	70
Talab hajmi	80	50	50	70	

4.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Talab hajmi	45	45	100	160	

5.

b_i / a_j	20	30	20	50
20	4	1	3	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4

6.

b_i / a_j	60	40	40	30	50
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

7.

b_i / a_j	50	40	40	15	25
70	6	3	1	5	7
20	8	4	2	4	3
50	3	5	5	6	2
50	5	1	1	3	6

8. Quyidagi ochiq modelli transport masalalarini eching.

a)

b_i / a_j	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

b)

b_i / a_j	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

v)

b_i / a_j	100	110	120	90
115	9	8	10	11
125	11	10	9	8
160	3	7	5	6

g)

b_i / a_j	90	90	90	90
100	2	7	9	10
120	3	3	6	8
180	4	2	7	4

9. Berilgan masalalarni ε - usulini qo'llab eching.

a)

b_i / a_j	60	60	40	90
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
40	6	7	8	9
90	9	6	5	4

b)

b_i / a_j	120	90	45	45
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

v)

b_i / a_j	35	25	20
20	5	2	3

30	3	5	2
20	2	5	3

g)

b_i \ a_j	60	60	60
50	2	4	3
40	4	3	2
110	3	2	4

Javoblar:

1. $X = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}; \ F_{\min} = 790.$

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ F_{\min} = 780.$

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ F_{\min} = 720.$

4. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 35 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}; \ F_{\min} = 800.$

12- mashg'ulot

Butun sonli chiziqli programmalash masalalari.

Ko'p hollarda chiziqli programmalash masalalarida o'zgaruvchilardan butun bo'lishlilik sharti talab qilinadi. Agar o'zgaruvchilarning hammasi butun bo'lishligi talab qilinsa, u holda to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasi deb ataluvchi masala hosil bo'ladi. Bu masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_j, \quad i=1,2,3,...,m; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3,...,n; \qquad (3)$$

$$x_j \in Z, \quad j=1,2,3,...,n; \qquad (4)$$

Bunda Z - butun sonlar to'plami.

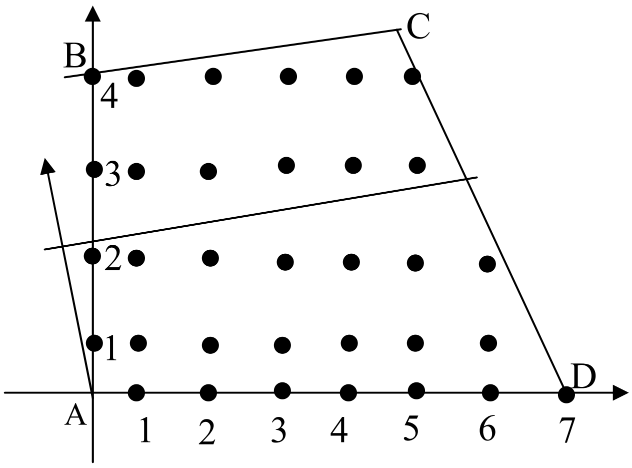
(1)-(4) masalaning mumkin bo'lgan echimlar to'plami $\widetilde{K}$ koordinatalari butun sonlar bo'lgan nuqtalar to'plamidan tashkil topadi. $\widetilde{K}$ to'plam (1)-(3) chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan echimlar to'plami K ning qismi, ya'ni $\widetilde{K} \subset K$ ekanligini e'tiborga olsak, ikki o'zgaruvchili to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini grafik usulida echish mumkin bo'ladi.

1-misol.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 29 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \to \min$$

Echish: R^2 tekislikda berilgan masalaning o'zgaruvchilarini butun bo'lishi shartiga e'tibor bermasdan, berilgan masalani oddiy chiziqli programmalash masalasi deb, K mumkin bo'lgan echimlar to'plamini tuzib, K dagi koordinatalari butun son bo'lgan nuqtalarni belgilaymiz. Bu nuqtalar to'plami to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasining $\widetilde{K}$ mumkin bo'lgan echimlar to'plamini tashkil qiladi.



12.1.- chizma.

F(x) funktsiyaning sath chizig'ini F(x) ni kamayish yo'nalishi $-\nabla F=(-1;\ 20)$ bo'yicha siljitib, sath chizig'i va $\widetilde{K}$ to'plam kesishmasi bo'sh to'plam bo'lmasligi shartida shu chiziqning eng chetki holini topamiz. Sath chizig'ini bunday holi V(0; 4) nuqtada bo'ladi. Shu sababdan berilgan masalaning echimi $\widetilde{X}=(0;4)$ bo'ladi va
$F_{min}=F(\widetilde{X})=-80$.

12.1 chizmadan ko'rinib turibdiki, berilgan masalaning oddiy chiziqli programmalash masalasi sifatida qaralgan holidagi echimi X=(5; 4,5) bo'ladi va $F_{min}=F(X)=-85$.

Bundan shunday xulosa chiqarish mumkin:

Umuman olganda, maqsad funktsiyaning $\widetilde{K}$ to'plamdagi minimum nuqtasi oddiy chiziqli programmalash masalasining echimiga yaqin bo'lgan koordinatalari butun sonli nuqta bilan bir narsa emas.

O'zgaruvchilari soni istalgancha bo'lgan butun sonli chiziqli programmalash masalasini echishda Gomori usulidan foydalaniladi. Gomori usuli (1)-(3) oddiy chiziqli programmalash masalasini (4) shartiga e'tibor bermagan holda mumkin bo'lgan echimlar to'plami *K* dan koordinatlari butun son bo'lmagan nuqtalardan iborat qismini birin-ketin kesishdan iboratdir. Bu «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama yordamida amalga oshiriladi.

Gomori usulining algoritmini keltiramiz.

1. Berilgan butun sonli chiziqli programmalash masalasini o'zgaruvchilarining butun bo'lishlilik (4) shartiga e'tibor bermasdan, uni (1)-(3) oddiy chiziqli programmalash masalasi sifatida simpleks usul yordamida echamiz. Agar topilgan echim X uchun (4) shart bajarilsa, u holda X berilgan masalaning ham echimi bo'ladi, aks holda simpleks-jadvalni A_0 ustunida joylashgan echim X ni aniqlovchi β_i sonlar ichida $\{\beta_i\}>0$ shartni qanoatlantiruvchi sonlar mavjud bo'ladi.

Eslatma. Ixtiyoriy $a\in R^1$ sonni quyidagicha yozish mumkin:

$$a=[a]+\{a\},$$

bunda $[a]$ - berilgan *a* sonni butun qismi va $\{a\}=a-[a]$ - uning kasr qismi.

Masalan, $\left[\frac{7}{3}\right]=2, \qquad \left[-\frac{7}{3}\right]=-3,$

$\left\{\frac{7}{3}\right\}=\frac{7}{3}-\left[\frac{7}{3}\right]=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}; \qquad \left\{-\frac{7}{3}\right\}=-\frac{7}{3}-\left[-\frac{7}{3}\right]=-\frac{7}{3}+3=\frac{2}{3};$

2. Butun bo'lmagan β_i lar ichidan bittasini, masalan, β_r ni $\{\beta_r\} = \max\{\beta_i\}$ shart asosida tanlanadi. Simpleks-jadvalni r – satri bo'yicha quyidagi ko'rinishdagi

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{q_{rj}\} x_j \leq -\{\beta_r\}$$

qo'shimcha shart tuziladi. Bu qo'shimcha shart $x_{n+1} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchi yordamida quyidagi

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{q_{rj}\} x_j + x_{n+1} = -\{\beta_r\}$$

«kesuvchi» tenglama tuziladi va uni qo'shimcha satr sifatida simpleks-jadvalga kiritiladi. Endi simpleks-jadval chiziqli programmalash masalasini bazis echimini tasvirlay olmaydi, chunki A_0 ustunda $-\{\beta_r\} < 0$ paydo bo'ladi.

3. Mumkin bo'lgan bazis echimga o'tish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak bo'ladi:

a) manfiy β_k ozod hadli satr «hal qiluvchi» satr hisoblanadi.

(Ravshanki, birinchi qadamda k=n+1 bo'ladi);

b) agar barcha koeffitsientlar $q_{kj} > 0$ bo'lsa, masala echimga ega bo'lmaydi. Aks holda «hal qiluvchi» ustunning ℓ nomeri quyidagi

$$\frac{\Delta_l}{|q_{kl}|} = \min_{j:q_{kl}<0} \frac{\Delta_j}{|q_{kj}|}$$

shartdan aniqlanadi;

v) q_{kj} «hal qiluvchi» element asosida simpleks-jadvalni o'zgartiramiz.

4. Agar 3- qadamda topilgan chiziqli programmalash masalasini echimi butun bo'lishlik sharti, ya'ni (4)- shart bajarilsa hisoblash to'xtatiladi, aks holda 2- qadamga o'tib, hisoblash yuqorida bayon etilgan qadamlar bo'yicha davom ettiriladi.

Bu algoritm asosida to'la butun sonli chiziqli programmalash echimi topiladi yoki uning echimi mavjud emasligi aniqlanadi.

2- misol. 1- misolda qaralgan masalani Gomori usuli bilan eching.

Echish: $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritib bu masalani kanonik ko'rinishda yozamiz.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \rightarrow \min$$

Chegaraviy shartlarning barcha koeffitsentlari butun sonlardir. Shu sababdan x_1, x_2 o'zgaruvchilarning butunligi x_3, x_4 o'zgaruvchilarning butun bo'lishligiga olib keladi. Shu sababdan kanonik ko'rinishga keltirilgan masalani to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasi sifatida qarash mumkin. Gomori usulidan foydalanamiz.

Masalani oldin simpleks usuli yordamida echamiz.

B	S_b	A_0	1	-20	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	40	-1	10	1	0
A_4	0	29	4	2	0	1
Δ_j		0	-1	20	0	0
A_2	-20	4	-1/10	1	1/10	0
A_4	0	21	21/5	0	-1/5	1
Δ_j		-80	2	0	-2	0
A_2	-20	9/2	0	1	2/21	1/42
A_1	1	5	1	0	-1/21	5/21
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21

X $_{onm}$ =(5; 9/2; 0; 0) $F_{\min} = -85$ butun bo'lishlik shartini qanoatlantirmaydi. Shu sababdan oxirgi simpleks jadvalga qo'shimcha satr kiritamiz:

$$\{\beta_1\} = \frac{9}{2} - \left[\frac{9}{2}\right] = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}; \qquad q_{11} = q_{12} = 0 \qquad q_{13} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21}$$

$$q_{14} = \frac{1}{42} - 0 = \frac{1}{42}$$

Undan keyin algoritmda tasvirlangan qoida bo'yicha simpleks-jadvalni o'zgartiramiz.

B	S_b	A_0	1	-20	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	-20	9/2	0	1	2/21	1/42	0
A_1	1	5	1	0	-1/21	5/21	0
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21	0
A_5	0	-1/2	0	0	-2/21	-1/42	1
A_2	-20	4	0	1	0	0	1
A_1	1	0	1	0	-1	0	10
A_4	0	21	0	0	4	1	-42
Δ_j		-80	0	0	-1	0	-10

Oxirgi simpleks-jadval berilgan masalaning echimini $\widetilde{X}_{onm} = (0;4)$ $\widetilde{F}_{\min} = F(\widetilde{X}) = -80$ beradi.

Qayd qilib o'tamizki, simpleks jadvalga kiritilgan qo'shimcha shartning kesuvchi tenglama ko'rinishi quydagicha

$$-\frac{1}{42}x_4 - \frac{4}{42}x_3 \leq -\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Bu shartni $x_3=40+x_1-10x_2$, $x_4=29-4x_1-2x_2$ tenglamalar yordamida x_1 va x_2 o'zgaruvchilarga o'tkazib olamiz: $x_2 \leq 4$. Bundan ko'rinib turibdiki qo'shimcha shart *K* to'plamdan (12.1 chizmadagi ABCD ko'pburchakdan) X=(5; 9/2) nuqtani o'z ichiga oluvchi qismini kesib tashlaydi.

Eslatib o'tamizki, shartlari tengsizlik

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (5)$$

bilan berilgan to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasidan kanonik ko'rinishga o'tishda, umuman olganda, to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasi hosil bo'lmaydi, chunki x_{n+i} qo'shimcha o'zgaruvchilar butun bo'lish shartiga bo'ysunmaydi.

Ammo (5) da barcha a_{ij} va b_i lar butun sonlar bo'lgan holda butun bo'lishlik shartini x_{n+i} larga ham tarqatish mumkin ekan.

Agar (5) a_{ij} va b_i lar ratsional sonlar bo'lganda ham kanonik ko'rinishga o'tishda to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini hosil qilamiz. Buning uchun (5) ni a_{ij} va b_i lar maxrajlarining eng kichik umumiy karralisiga ko'paytirib faqat shundan so'ng x_{n+i} qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritish kerak ekan.

Mustaqil echish uchun masalalar.

To'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini grafik usul bilan eching.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36 \\ x_1 \le 13 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: \widetilde{X} = (13;3), \widetilde{F}_{\min} = -16$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: \widetilde{X} = (1;2), \widetilde{F}_{\min} = -31$

$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \to \min$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: Иккита$ $ечим: \widetilde{X} = (2;0), \widetilde{X} = (1;1), \widetilde{F}_{\min} = -2$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: \widetilde{X} = (2;1), \widetilde{F}_{\min} = -11$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

5. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (0;19), \widetilde{F}_{\min} = 19$

$F(x) = 3x_1 + x_2 \to \min$

6. $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (2;6), \widetilde{F}_{\min} = 52$

$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

7. $\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (0;0;1;2), \widetilde{F}_{\min} = -1$

$F(x) = x_2 - x_3 \to \min$

8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (1;9;0;5), \widetilde{F}_{\min} = -9$

$F(x) = -x_2 \to \min$

Quyidagi to'la butun sonli chiziqli programmalash masalalarini Gomori usuli bilan eching.

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (0;4;0;1;0), \widetilde{F}_{\min} = 1$

$F(x) = -x_1 + x_4 \to \min$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (0;0;11;3;1), \widetilde{F}_{\min} = -24$

$F(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (3;2;2;1), \widetilde{F}_{\min} = -2$

$F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (0;3;2;0), \widetilde{X} = (1;2;1;1),$ $\widetilde{X} = (2;1;0;2), \widetilde{F}_{\min} = -3$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (1;3;0;0;1), \widetilde{F}_{\min} = 8$

$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (2;1;1;1), \widetilde{F}_{\min} = -11$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (2;1;2;1), \widetilde{F}_{\min} = -3$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

16. $\begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (1;3;5;3), \widetilde{F}_{\min} = -5$

$F(x) = -x_3 \to \min$

17. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (3;1;2;3;3), \widetilde{F}_{\max} = 19$

$F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 14 \\ 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (1;2;3), \widetilde{F}_{\min} = 10$

$F(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 18 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (6;1;4), \widetilde{F}_{\min} = -17$

$F(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$

20. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 44 \\ x_1 \leq 22 \\ x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (6;18), \widetilde{F}_{\min} = -78$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

21. $\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$ $Ж: \widetilde{X} = (0;1;1), \widetilde{F}_{\min} = 3$

$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

$$22.\ \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le \frac{25}{6} \\ x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$$

$Ж: \widetilde{X} = (0;0;7), \widetilde{F}_{\min} = -21$

13- mashg'ulot
Chiziqsiz programmalash masalasini geometrik talqinidan foydalanib echish.

Faraz qilaylik, chiziqsiz programmalash masalasi quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$q_i(x_1,x_2,......,x_n) \le b_i,$ (i=1,2,.......,m) (1)

$q_i(x_1,x_2,......x_n) \le b_i,$ (i=m+1,m+2,.....,n) (2)

$Z=f(x_1,x_2,......x_n) \to min$ (3)

Bu erda (1) va (2) munosabatlar chegaraviy shartlardan iborat bo'lib, noma'lumlarning nomanfiylik shartini ham o'z ichiga oladi.

Ushbu masalaning optimal echimini geometrik talqindan foydalanib topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshirish kerak.

1. Masalaning (1) va (2) chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini, ya'ni mumkin bo'lgan rejalar to'plamini yasash kerak.

2. $f(x_1,x_2,......x_n)=Q$ (Q-ixtiyoriy o'zgarmas katta son).

3. Q ning qiymatini o'zgartirib (kamaytirib) borib, eng past sathli gipersirt topiladi yoki funktsiyaning quyidan chegaralanmaganligi aniqlanadi.

4. Mumkin bo'lgan rejalar to'plamining eng past sathli gipersirt bilan kesilgan nuqtasi aniqlanadi va f funktsiyaning bu nuqtadagi qiymati topiladi.

youyidagi masalani geometrik talqindan foydalanib echamiz.

Misol. $x_1x_2 \le 4$

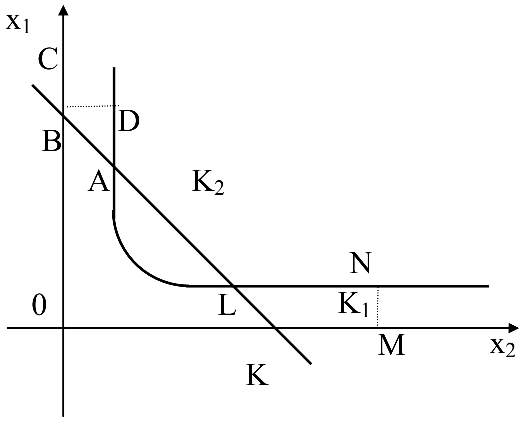
$x_1 + x_2 \ge 5$

$x_1 \le 7$

$x_2 \ge 6$

$x_1 \ge 0, x_2 \le 0$

$Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min)$



13.1 - chizma.

Echilishi: Bu masalaning mumkin bo'lgan rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmaydi, aksincha, ikkita ayrim K_1 va K_2 qismlardan iborat bo'ladi (13.1-chizma). Maqsad funktsiya o'zining minimal qiymati Z=17 ga A(1;4) va L(4;1) nuqtalarda erishadi. D($\frac{2}{3}$;6) va N(7;$\frac{4}{7}$) nuqtalarda esa funktsiya lokal maksimum qiymatlarga erishadi.

Z(D)=$328/9$, Z(N)=$2417/49$

Lokal maksimum qiymatlarni taqqoslash Z funktsiya N nuqtada global maksimumga erishishini ko'rsatadi. D va N nuqtalarning koordinatalari va ulardagi Z funktsiyaning qiymati quyidagicha topiladi: D($x_1^*;x_2^*$) nuqta $x_2=6$ va $x_2=4/x_1$ egri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamalarni qanoatlantirishi kerak, ya'ni:

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_2^* = \dfrac{4}{x_1^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases} \qquad Z^*=x_1^{*2}+x_2^{*2} \qquad Z^*=328/9=Z(D)$$

Xuddi shuningdek, N nuqta $x_1=7$ to'g'ri chiziq va $x_2=4/x_1$ egri chiziqning kesishgan nuqtasi bo'lishi uchun uning x_1^0, x_2^0 koordinatalari bu tenglamalarni qanoatlantirishi kerak, ya'ni:

$$\begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \dfrac{4}{7} \\ Z^0 = x_1^{02} + x_1^{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \dfrac{4}{7} \\ Z^0 = \dfrac{2417}{49} \end{cases}$$

Mustaqil bajarish uchun misollar.

Grafik usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalash masalalarini eching:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=2(x_1-7)^2+4(x_2-3)^2 \rightarrow \min(\max)$

J: min Z= $\frac{64}{3}$; X($\frac{13}{3}$; $\frac{5}{3}$).

max Z=134 ; X(0;6).

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Z= $x_1 \cdot x_2 \rightarrow max$

J: max Z=0 X(3;3)

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \rightarrow \min(\max)$

J: min Z=0; X(2;2).

max Z=66; X(0;7).

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min(\max)$

J: min Z=2,5; X(4,5;1,5).

max Z=40 ; X(0;4).

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=25(x_1-2)^2=(x_2-2)^2 \rightarrow max$

J: max Z=100; X(0;2).

6. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$\cdot Z = x_1 \cdot x_2 \to max$

J: max Z=24; X(6;4).

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$Z=9(x_1-5)^2+4(x_2-6)^2 \to min$

J: min Z=16; X(5;4).

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \to min(max)$

J: max Z=65; X(2;12).

min Z=$\frac{324}{101}$; X($\frac{123}{101}$;$\frac{422}{101}$).

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2 \to min(max)$

J: min Z=0 X(4;3)

max Z=137,25 X(13;10,5)

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to min$

J: max Z=45; X(1,0) (global max).

max Z=40; X=(6,0) (lokal max).

14- mashg'ulot
Shartlari tengliklardan iborat bo'lgan shartli ekstremum masalasi. Lagranj ko'paytuvchilari usuli. Kun-Takker teoremasidan foydalanib chiziqsiz (qavariq) programmalash masalasini echish.

1. Deylik, $G_i(x_1,x_2,......,x_n)=b_i \quad (i=\overline{1,m})$ (1)

$Z=f(x_1,x_2,......,x_n) \to \max (\min)$ (2)

ko'rinishidagi masalani echish talab qilingan bo'lsin, ya'ni (1) shartlarni qanoatlantiruvchi va $Z=f(x_1,x_2,......,x_n)$ funktsiyasiga maksimum (minimum) qiymat beruvchi $X(x_1,x_2,......,x_n)$ nuqtani topish kerak bo'lsin.

$G_i(x_1,x_2,......,x_n)$ va $f(x_1,x_2,......,x_n)$ funktsiyalar va ularning hamma $x_1,x_2,......,x_n$ noma'lumlar bo'yicha olingan xususiy hosilalar uzluksiz deb faraz qilaylik. Agar noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda masalani Langrajning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan echish mumkin.

Buning uchun:

$F(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda(b - G(X)),$ (3)

ya'ni

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = f(x_1,x_2,...,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - G_i(x_1,x_2,.....,x_n))$$

(4)

funktsiyani tuzamiz. Bu funktsiya Lagranj funktsiyasi deb ataladi.

Lagranj funktsiyasidan $x_j(j=1,....,n)$ va $\lambda_i (i = 1,\ldots,m)$ noma'lumlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_j} &= \frac{\partial F(X)}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g(X)}{\partial x_j} = 0,\ j=\overline{1,n} \\ \frac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial \lambda_i} &= b_i - G_i(X) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ushbu sistema Lagranj funktsiyasining lokal ekstremumi mavjudligining zaruriy shartidan iborat. Agar f(x) funktsiya $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda $\Lambda^0(\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots,\lambda_m^0)$ vektor mavjud bo'ladiki, uning uchun $(x_1^0,x_2^0,\ldots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots,\lambda_m^0)$ nuqta yuqoridagi (5) sistemasining echimi bo'ladi.

Misol. Lagranj usulidan foydalanib quyidagi chiziqsiz programmalash masalasini eching.

$x_1^2 + x_2^2 = 1$

$Z = x_1 + x_2 \to \max$

Echish: Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$F(x_1,x_2,\lambda)=(x_1+x_2)+\lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

Bu funktsiyadan x_1,x_2 va λ bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 1 + 2\lambda x_1 = 0 & & 2\lambda x_1 = -1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 1 + 2\lambda x_2 = 0 & \Rightarrow\quad & 2\lambda x_2 = -1 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x_1^2 + x_2^2 = 1 & & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Sistemani echib quyidagini topamiz:

$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \lambda_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Javob: $X_{onm}=(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}) Z_{\max} = 1$

2. Faraz qilaylik, quyidagi chiziqsiz (qavariq) programmalash masalasi berilgan bo'lsin.

$G_i(X)=G_i(x_1,x_2,......,x_n)\geq b_i$, (i=1,....,m) (1)

$x_i\geq 0, (j=1,...,n)$ (2)

$Z=f(x)=f(x_1,x_2,......,x_n)\to \max$ (3)

Agar kamida bitta $x=(x_1,x_2,......,x_n)$ nuqtadan $G_i(x_1,x_2,......,x_n)>b_i$, (i=1,.....,m) tengsizlik o'rinli bo'lsa, bunga Sleyter sharti deyiladi. Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o'rinli bo'ladi:

Teorema. $X^0 \geq 0$ nuqta (1)-(3) masalaning optimal echimi bo'lishi uchun bu nuqtada

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j}\leq 0... \qquad (4)$$

$$x_j^0\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j}=0, x_j^0\geq 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_j}\geq 0... \qquad (6)$$

$$\lambda_i^0\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i}=0, \lambda_i^0\geq 0 \qquad (7)$$

shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir. Bu erda $F(X,\Lambda)$ - Lagranj funktsiyasi, Λ - Lagranj ko'paytuvchilari.

Agar qavariq programmalash masalasi

$q_i(x)= q_i(x_1,x_2,......,x_n)\leq b_i$ (i=1,2,......,m) (8)

$x_j\geq 0$ (j=1,2,......,n) (9)

$Z = f(x) = f(x_1, x_2,..., x_n) \to \min$ (10)

ko'rinishda bo'lsa, u holda X^0 nuqta bu masalani echimi bo'lishining zaruriy va etarlilik shartlari quyidagidan iborat bo'ladi.

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j}\geq 0 \qquad (11)$$

$$x_j^0\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j}=0, x_j\geq 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_j}\leq 0 \qquad (13)$$

$$\lambda_j\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_j}=0, \lambda_i^0\geq 0 \qquad (14)$$

Yuqoridagi (4)-(7), (11)-(14) shartlar qavariq programmalash masalasining ekstremumi mavjudligining zaruriy va etarlilik shartlaridan iborat.

1-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} \rightarrow \max$$

Masalani grafik usulda eching va topilgan echim uchun Kun-Takker shartlari o'rinli ekanligini ko'rsating.

Echish. Masalani grafigi usulda echib,
X^o (0,8;0,4) va f(0,8;0,4)= 0,8 ekanligini aniqlaymiz.

Endi shunday Λ^0 mavjud bo'lib, $\left(X^0, \Lambda^0\right)$ da Kun-Takker shartlarining bajarilishini ko'rsatamiz.

Berilgan masala uchun Lagranj funktsiyasini tuzamiz.

$$f(X, \Lambda) = \lambda_0\left(-x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \lambda_1\left(2x_1 + x_2 - 2\right) + \lambda_2\left(8 - 2x_1 - x_2\right) + \lambda_3\left(6 - x_1 - x_2\right)$$

X^0 nuqtada masalaning 2-tengsizligi uchun Sleyter sharti bajariladi. Bu holda masala normal bo'lib, $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilinadi.

Lagranj funktsiyasidan $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_{3,};\qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2;\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2 \cdot 0{,}8 - 0{,}4 = 6 \succ 0$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_3} = 6 - 0{,}8 - 0{,}4 = 4{,}8 \succ 0$$

$$\lambda_i^{\ 0}\, \frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_{\ i}} = 0$$

shartga ko'ra λ_2 va λ_3 larning qiymatlari nolga teng.

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 - 2 = 0$$

tenglik bajarilganligi uchun λ_1 nolga teng bo'lmagan qiymatni qabul qilishi ham mumkin.

$$x_j^{\,0}\,\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_j}=0 \quad \text{va}$$

$x_j^{\,0}\ge 0$ dan

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_j}=0; \qquad\qquad (j=1,2)$$

bo'lishi kerak, ya'ni

$$-2\cdot 0{,}8+2\lambda_1-\lambda_3=0$$

$$-2\cdot 0{,}4+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \qquad \Rightarrow \lambda_1=0{,}8 \quad \text{va} \quad \lambda=\left(0{,}8;0;0\right)$$

$$\lambda_2=0,\lambda_3=0$$

Demak, $(X_{0,}\Lambda_0)\ =\left(0{,}8;0{,}4;0{,}8;0;0\right)$ nuqtada haqiqatdan ham, Kun-Takker shartlari bajarilayapti, ya'ni u egar nuqta bo'layapti.

2-misol. Kun-Takker shartlaridan foydalanib $X_0=\left(0;1\right)$ nuqta quydagi chiziqsiz programmalash masalasining echimi ekanligini ko'rsating.

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2\le 8 \\ 2x_1+x_2\le 4 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$Z=f\left(x_{1,}x_2\right)=x_1^{\,2}-2x_1+3x_2^{\,2}\to \min$$

Echish $X^0\left(1;0\right)$ nuqtada chegaraviy shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi, demak Sleyter sharti bajariladi. Bu holda $\lambda_0=1$ deb qabul qilish mumkin, u holda Lagranj funktsiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F\left(x_{1,}x_{2,}\lambda_{1,}\lambda_2\right)=x_1^{\,2}-2x_1+3x_2^{\,2}+\lambda_1\left(4x_1+5x_2-8\right)+\lambda_2\left(2x_1+x_2-4\right)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, \lambda_1\ge 0, \lambda_2\ge 0,$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_1}=\left(2x_1-2+4\lambda_1+2\lambda_2\right)_{x^0}\ge 0$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_2}=\left(6x_2+5\lambda_1+\lambda_2\right)_{x^0}\ge 0$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1}=\left(4x_1+5x_2-8\right)_{x^0}=-4\prec 0,$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1}\cdot\lambda_1^{\,0}=0\Rightarrow \lambda_1^{\,0}=0.$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_2} = 2x_1 + x_2 - 4 = -2 \prec 0,$$
$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_2}\cdot\lambda_2{}^0 = 0 \Rightarrow, \lambda_2{}^0 = 0$$

bundan ko'rinadiki $\left(X^0,\Lambda^0\right) = (1;0;0;0)$ nuqta Kun-Takker shartlarini qanoatlantiradi. Demak, u Lagranj funktsiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun $X^0(1;0)$ nuqta berilgan masalaning echimi bo'ladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1.
$$x_1 + x_2 = 180$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$Z = 4x_1 + x_1{}^2 + 8x_2{}^2 + x_2^2 \to \min$$
$$б: x_1 = 91; x_2 = 89; Z_{\min} = 17278$$

2.
$$x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$Z = x_1{}^2 + x_2{}^2 \to \min(max)$$
$$б: x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = \frac{5}{2}; \qquad Z_{\min} = \frac{25}{2}.$$

3.
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 - 3x_2 = 12$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$Z = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3 \to \min(\max)$$
$$б: x_1 = \frac{27}{8}; x_2 = -\frac{7}{4}; x_3 = \frac{19}{8}; \qquad Z_{\min} = 16\frac{53}{64}$$

4.
$$2x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 = 12$$
$$2x_1 - x_2 = 8$$
$$Z = x_1\cdot x_2\cdot x_3 \to \min(\max).$$
$$б: X = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{28}{39}\right); \quad Z_{\min} = -\frac{56}{27}.$$

5.
$$x_1 + x_2 = 4$$
$$x_2 + x_3 = 4$$
$$Z = x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 \to \min(\max)$$

$б: X = (2;2;2) \cdot Z_{\max} = 8$

6.

$x_1^2 + x_2^2 = 19$

$x_1 + 2x_2 \cdot x_3 = 11$

$Z = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 \cdot x_3 \to \min(\max).$

$б: X_1 = (-1;3;2) \cdot Z_{\min} = 43.$

$X_2 = (-1;-3;-2).$

7

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 8$

$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \to \min(\max)$

$б: 1) X_1 = (2;2;1), X_2 = (2;1;2), X_3 = (1;2;2), Z_{\min} = 4$

$2).\ x_1 = \left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right). x_3 = \left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right). x_3 = \left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right). z_{MAX} = \frac{112}{27}$

8.

$x_1 + x_2 + x_3 = 18$

$Z = x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3^4 \to \max$

$б: X = (4;6;8) \cdot Z_{\max} = 14155776$

9. Ikkita korxonada 200 birlik ma'lum mahsulot ishlab chiqarish rejalashtirilgan. I korxonada ishlab chiqiladigan x_1 miqdordagi mahsulotga $4x_1^2$ miqdorda, II korxonada x_2 miqdordagi mahsulot ishlab chiqarish uchun esa $20x_2 + 6x_2^2$ miqdorda harajat sarf qilinadi. ²ar bir korxonada qanchadan miqdorda mahsulot ishlab chiqarilganda umumiy harajatlar miqdori eng kam bo'ladi?

$Ж: X = (121;79)$

10. Korxonada ikkita texnalogiya asosida mahsulot ishlab chiqariladi. Birinchi texnalogiya bo'yicha ishlab chiqariladigan x_2 miqdordagi mahsulotga $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$ miqdorda, ikkinchi texnalogiya asosida ishlab chiqariladigan x_2 miqdordagi mahsulotga $b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$ miqdordagi xarajat qilinadi. Korxonada d birlik mahsulot ishlab chiqarishi kerakligini nazarda tutib, har bir texnalogiya bo'yicha qancha mahsulot ishlab chiqarilganda sarf qilingan umumiy xarajatlar miqdori minimal bo'ladi?

11. youydagi masala uchun $X^0=(0;1)$ nuqta echim bo'lishini Kun-Tekker shartlari orqali aniqlang.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 8x_1^2 + x_2^2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2 \to \max$$

12. youyidagi masala uchun $X^0 = (3;4)$ nuqta echim bo'lishini Kun-Takker shartlaridan foydalanib aniqlang.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ \quad x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_{1,} x_2) = x_2 - x_1{}^2 + 6x_1 \to \max$$

13. Masalani grafik usulda eching va topilgan echim Kun-Takker shartlarini qanoatlantirishini aniqlang.

$$б : X^0 = \left(\frac{123}{101}; \frac{422}{101}\right) \cdot Z_{\min} = \frac{324}{101}$$

14. Masalani garfik usulda echib, echim uchun Kun-Takker shartlarini bajarilishini aniqlang.

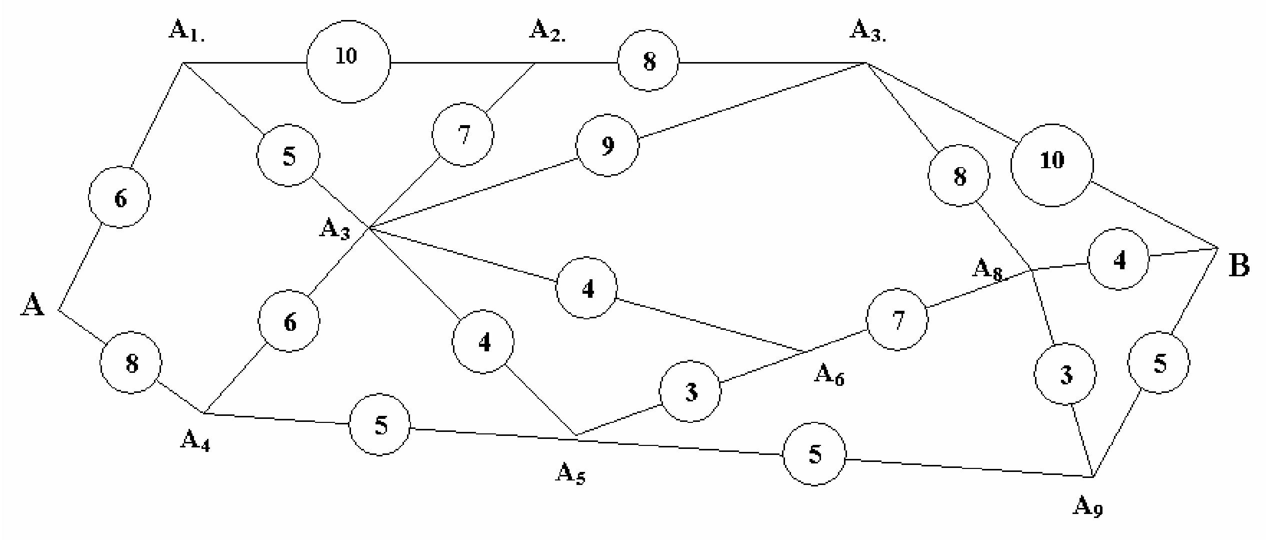
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 10x_1 - x_2 \le 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_{1,} x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max$$

15- mashg'ulot
Ko'p bosqichli iqtisodiy masalalarni
dinamik programmalash usullari bilan echish.

1. Daydi savdogar masalasi (eng qisqa yo'lni tanlash masalasi).

Faraz qilaylik, A va V punktlarni o'zaro bog'lovchi temir yo'llar to'ri berilgan bo'lsin (15.1-shakl). Bu punktlar orasida temir yo'l bilan bog'langan juda ko'p punktlar mavjud bo'lishi mumkin. Bunda har qanday ikki punkt orasidagi masofa ma'lum deb faraz qilamiz. Masalan, bu masofaning uzunligi 1-shakldagi har ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma ustiga yozilgan sonlardan iborat bo'lsin. A va V punktlarni eng qisqa yo'l bilan tutashtiruvchi marshrutni aniqlash masalasi qo'yiladi.

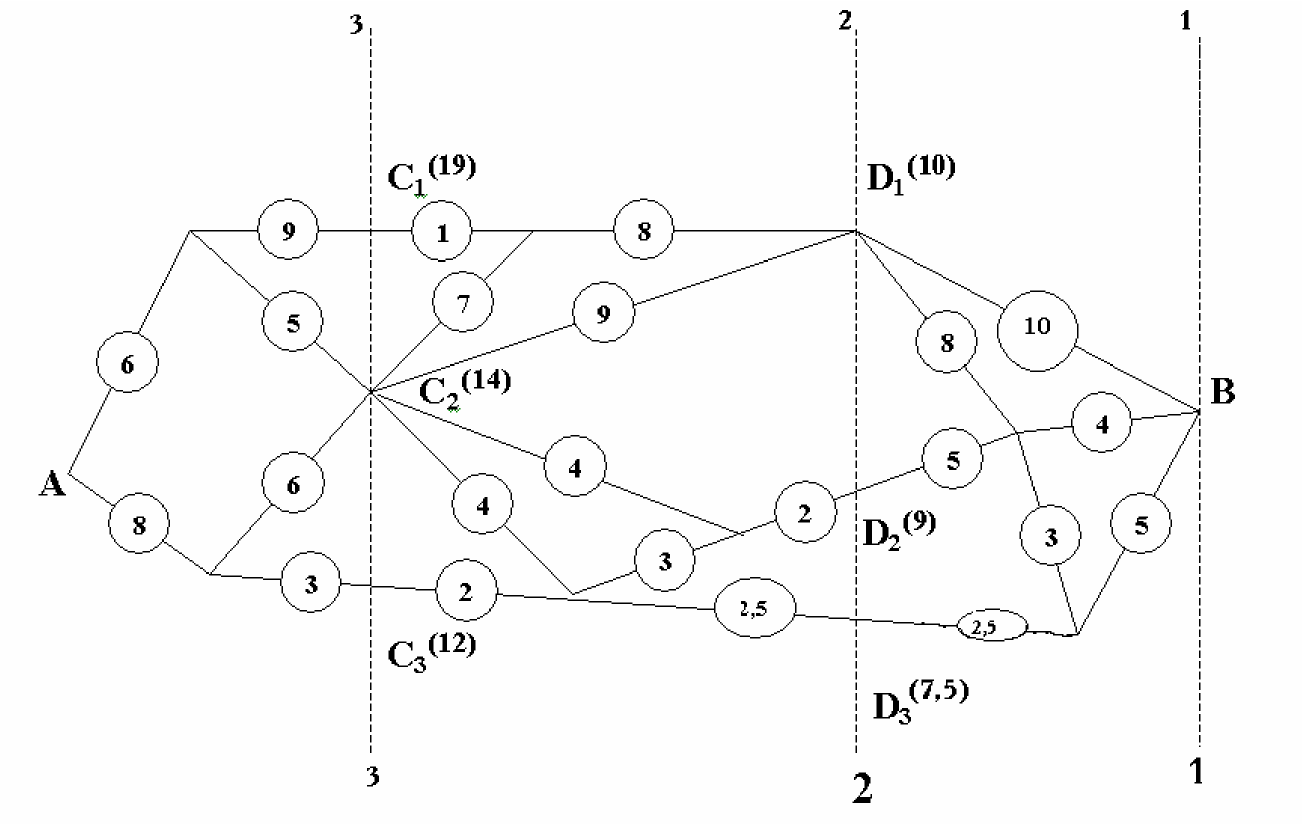


15.1.- shakl.

Masalani echish uchun (1-1), (2-2), (3-3) chiziqlar yordamida berilgan temir yo'llar to'rini ayrim qismlarga (bosqichlarga) ajratamiz (2-shakl).

(2-2) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan nuqtalarini D_1 , D_2 , D_3 lar bilan, (3-3) chiziqning kesishgan nuqtalarini esa C_1 , C_2 , C_3 lar bilan belgilaymiz. Birinchi qadamda V nuqtadan D_1 , D_2 va D_3 nuqtalargacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz:

$$V - D_1 : \min (10,\ 8+4\ ,\ 5+3+8)=10,$$
$$B - D_2 : \min (10+8+5\ ,\ 4+5,\ 5+3+5)=9,$$
$$B – D_3 : \min (5+2{,}5\ ,\ 4+3+2{,}5)=7{,}5.$$



15.2. – shakl.

2-shaklda D_1 , D_2 , D_3 nuqtalardan so'nggi V punktgacha bo'lgan eng qisqa masofa qavs ichida yozilgan. So'ngra (3-3) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan C_1 , C_2 , C_3 larni ko'ramiz. Bu nuqtalardan V nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz. Bu masofa

C_1 nuqta uchun min (1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+2+3+2+9,
1+7+2+2,5+7,5)= min(19, 23, 24, 20)=19.
C_2 nuqta uchun min (7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9,
4+2,5+7,5)= min(25, 19, 15, 16, 14)=14.
C_3 nuqta uchun min (2+2,5+7,5, 2+3+2+9)=12.

Bu masofalar shaklda qavs ichida yozilgan. 3 bosqichda A nuqtadan V gacha bo'lgan eng qisqa masofa topiladi. Bu masofa quyidagicha aniqlanadi:

min (6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12)=23

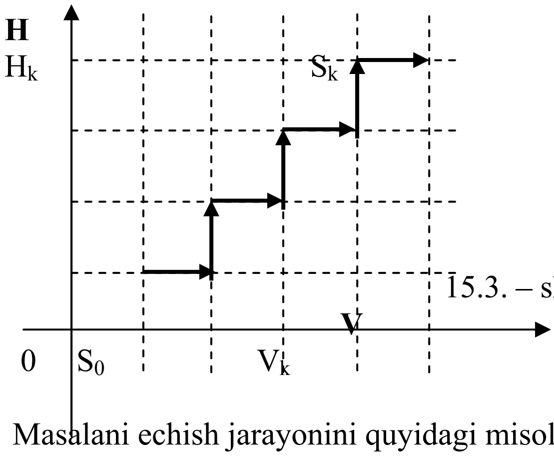
So'ngra A nuqtadan eng qisqa masofa bo'ylab V nuqtaga boradigan yo'lni belgilaymiz.

2. Samolyotning uchish balandligi va tezligini oshirishda sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini minimallashtirish masalasi.

Samolyot dastlab N_0 balandlikda V_0 tezlik bilan uchayotgan bo'lsin. Uning uchish balandligini N_k va tezligini V_k gacha ko'tarish kerak bo'lsin. Demak, samolyotning uchish balandligini N_0 dan N_k gacha, tezligini esa V_0 dan V_k gacha oshirishda sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini minimallashtirish masalasini hal qilish talab etiladi. Bunda aniq bir tezlik bilan uchayotgan samolyotning N_1 balandlikdan $N_2>N_1$ balandlikkacha ko'tarilishi uchun hamda aniq bir balandlikda uchayotgan samolyotning tezligini V_1 dan $V_2>V_1$ gacha ko'tarish uchun sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorlari ma'lum deb qaraladi. Ushbu masala dinamik programmalash masalasi sifatida quyidagicha tavsiflanadi: Samolyotning uchish balandligi va tezligi ko'rsatkichlari to'plamini shunday boshqarish kerakki, natijada sarf qilingan yoqilg'i miqdori minimal bo'lsin.

Echish. Samolyotning fazodagi holati ikkita parametr – tezlik (V) va balandlik (N) bilan aniqlanadi. Shuning uchun echimni VOH tekislikda qidiramiz. Aniqrog'i, shu tekislikdagi $N=N_0$

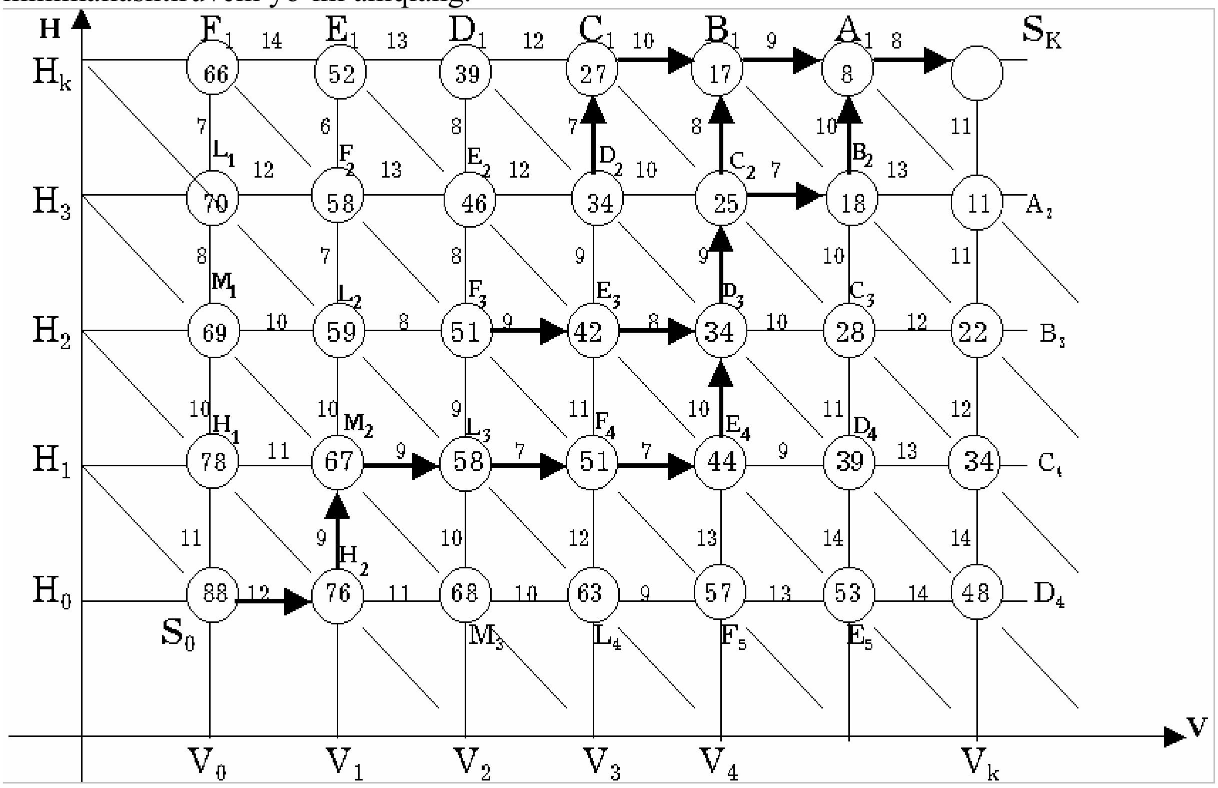
, $N=N_k$ va $V=V_0$, $V=V_k$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka qaraymiz. Samolyotni S_0 (V_0 , H_0) holatdan S_k (V_k , H_k) holatga, eng kam xarajat qilib, o'tkazish masalasi qo'yiladi. Bu masalani dinamik programmalash usullari bilan echish uchun (N_k-N_0) kesmani n_1 ta teng kesmachalarga, (V_k-V_0) kesmani esa n_2 ta teng kesmachalarga bo'lamiz, hamda har bir qadamda samolyot yo balandligini ($\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ birlikka), yoki tezligini ($\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ birlikka) oshiradi, deb qabul qilamiz. S nuqtani S_0 holatdan S_k holatga turli yo'llar bilan o'tkazish mumkin (3-shakl). Bu yo'llar ichida eng kam yoqilg'i miqdoriga mos keluvchisini tanlash kerak.



15.3. – shakl.

Masalani echish jarayonini quyidagi misolda ko'rsatamiz:

Misol. Masaladagi aniq ma'lumotlar quyidagi 4-shaklda tasvirlangan. Samolyotning N_k balandlikka ko'tarilishi va tezligini V_k gacha oshirishda sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorini minimallashtiruvchi yo'lni aniqlang.



15.4. -shakl.

Ushbu shakldagi vertikal chiziqlardagi sonlar samolyot balandligini oshirgandagi, gorizontal chiziqlardagi sonlar esa u tezligini oshirgandagi sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini ko'rsatadi.

Masalani echish jarayonini $n_1 + n_2 = 4+6=10$ qadamlarga bo'lamiz.

Optimallashtirish jarayonini eng oxirgi qadamdan boshlaymiz. Bunda S_k ni o'z ichiga oluvchi o'ng tomondagi eng yuqori to'rtburchakka qaraymiz. Shakldan ko'rinadiki, S_k nuqtaga A_1 va A_2 nuqtalardan o'tish mumkin. Agar A_1 dan S_k ga o'tilsa (tezlik oshirilsa), u holda 8 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Agar A_2 nuqtadan S_k ga o'tilsa (balandlik oshirilsa), u holda 11 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Ushbu raqamlarni A_1 va A_2 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga yozamiz. Bu qadamda eng kam yoqilg'i sarfiga mos keluvchi $A_1 \to S_k$ yo'nalish shartli optimal echim deb qabul qilinadi va strelka bilan belgilanadi.

9 qadamda V_1 , V_2 , V_3 nuqtalardan S_k nuqtaga eng kam yoqilg'i sarf qilib o'tish yo'lini aniqlaymiz. Agar V_1 nuqtadan S_k ga $B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalishi orqali o'tib 17 birlik yoqilg'i sarf qilish mumkin. V_2 nuqtadan S_k ga ikkita yo'l bilan o'tish mumkin:

I. $B_2 \to A_1 \to S_k$

II. $B_2 \to A_2 \to S_k$

Bunda I yo'lda 18 birlik, II yo'lda esa 24 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. V_3 nuqtadan S_k ga yagona $B_3 \to A_2 \to S_k$ yo'l bilan o'tish va 22 birlik V_1 , V_2 , V_3 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga ulardan S_k nuqtagacha sarf qilinadigan xarajatlardan eng kami yoziladi. Eng kam xarajat bilan bog'liq bo'lgan $B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalish shartli optimal yo'nalishi sifatida strelka bilan belgilanadi.

8- qadamda S_1 , S_2 , S_3 , S_4 nuqtalardan S_k nuqtagacha eng kam xarajat sarf qilib o'tiladigan yo'l qidiriladi. Bunda S_1 nuqtadan S_k ga yagona

$$C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$$

yo'nalish orqali o'tib, 27 birlik yoqilg'i sarflash mumkin.

S_2 nuqtadan V_1 va V_2 nuqtalar orqali S_k nuqtaga o'tilganda teng miqdordagi (25 birlik) yoqilg'i sarf qilinadi.

S_3 nuqtadan S_k ga ikkitagacha 2 ta o'tish mumkin:

I. $C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

II. $C_3 \to B_3 \to A_2 \to S_k$

Bunda I yo'l bilan o'tilganda 28 birlik va II yo'l bilan o'tilganda esa 24 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

S_4 nuqtadan S_k nuqtaga yagona

$$C_4 \to B_3 \to A_2 \to S_k$$

yo'l bilan o'tiladi va 34 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

Bu bosqichda shartli optimal boshqarish eng kam yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan $C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ va $C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$ yo'nalishlardan iborat bo'ladi. Bu yo'nalishlar strelka bilan ko'rsatiladi.

Shunday yo'l bilan davom etib, 7 qadamda 34 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 3 ta shartli optimal yo'nalish aniqlanadi:

a) $D_2 \to C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

b) $D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

v) $D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

6- qadamda 42 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 2 ta shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi:

a) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

b) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

5- qadamda 51 birlik yoqilg’i sarfi bilan bog’liq bo’lgan shartli optimal yo’nalishlar quyidagilar bo’ladi:

I. $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

II. $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

III. $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

IV. $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

4- qadamda 58 birlik yoqilg’i sarfi bilan bog’liq bo’lgan shartli optimal yo’nalish topiladi:

$L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_4 \to C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

3- qadamda 67 birlik yoqilg’i sarfi bilan bog’liq bo’lgan

$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

shartli optimal yo’nalishlar aniqlanadi.

2- qadamda 76 birlik yoqilg’i sarfi bilan bog’liq bo’lgan

$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

shartli optimal yo’nalishlar aniqlanadi.

Va nihoyat 1- qadamda 88 birlik yoqilg’i sarfi bilan bog’liq bo’lgan

$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

shartli optimal yo’nalishlar aniqlanadi.

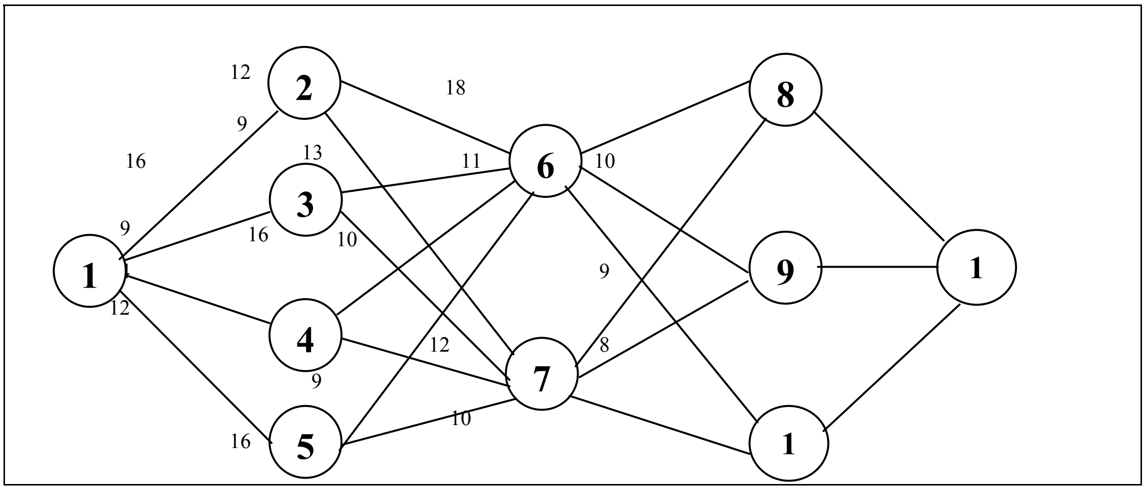
Bu yo’nalishlar optimal yo’nalish bo’ladi.

Optimal echimga, asosan, samolg’t 1- qadamda tezligini $V_0 + \Delta V$ darajagacha oshiradi, 2- qadamda u balandligini $H_0 + \Delta H$ gacha oshiradi. 3, 4, 5- qadamlarda samolyotning tezligi mos ravishda $V_0 + 2\Delta V$, $V_0 + 3\Delta V$, $V_0 + 4\Delta V$ ga oshishi, 6, 7, 8- qadamlarda esa uning balandligi mos ravishda $H_0 + 2\Delta H$, $H_0 + 3\Delta H$, $H_0 + 4\Delta H$ darajagacha oshishi kerak.

9 va 10 qadamlarda samolyot tezligini mos ravishda $V_0 + 5\Delta V$ va $V_0 + 6\Delta V$ darajagacha oshishi kerak. Natijada u eng kam, ya’ni 88 birlik yoqilg’i sarf qiladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

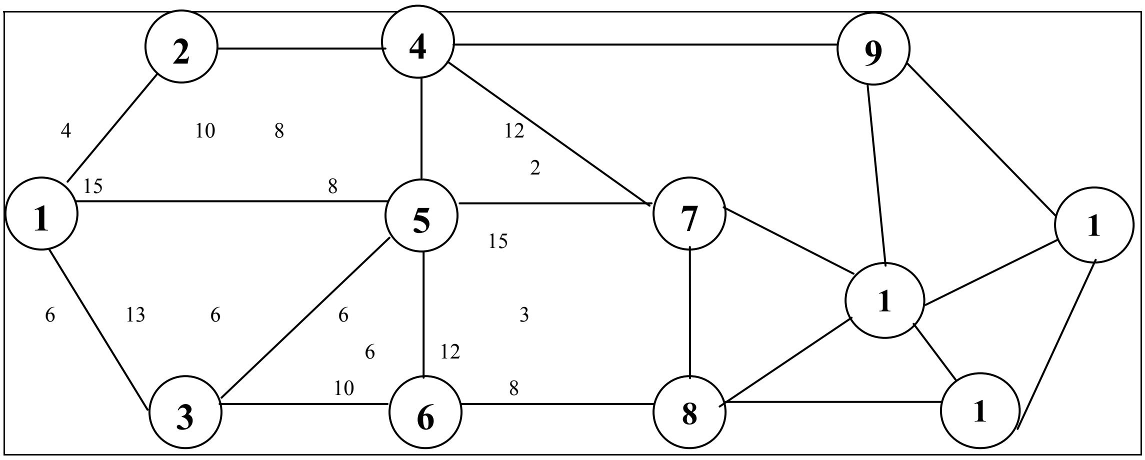
1. youyidagi shaklda keltirilgan ma'lumotlar asosida 1-punktdan 11- punktgacha eng qisqa yo'l (yo'nalish) ni aniqlang.



15.5. -shakl.

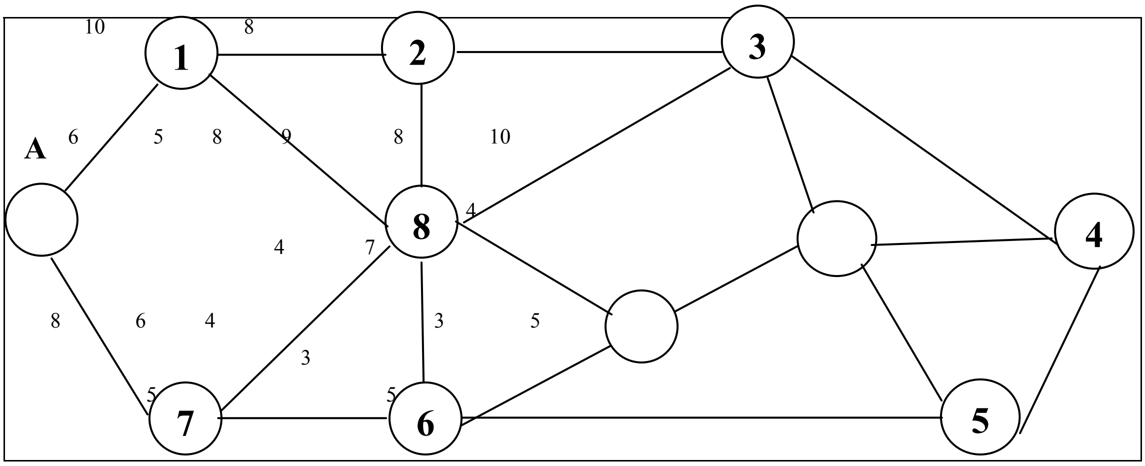
Shaklda har ikkita punktni tutashtiruvchi kesma ustiga ular orasidagi masofa yozilgan.

2. youyidagi shaklda yo'llar to'ridagi hamma nuqtalardan 1, 3, 5, 8, 12 nuqtalargacha eng qisqa masofalarni aniqlang.



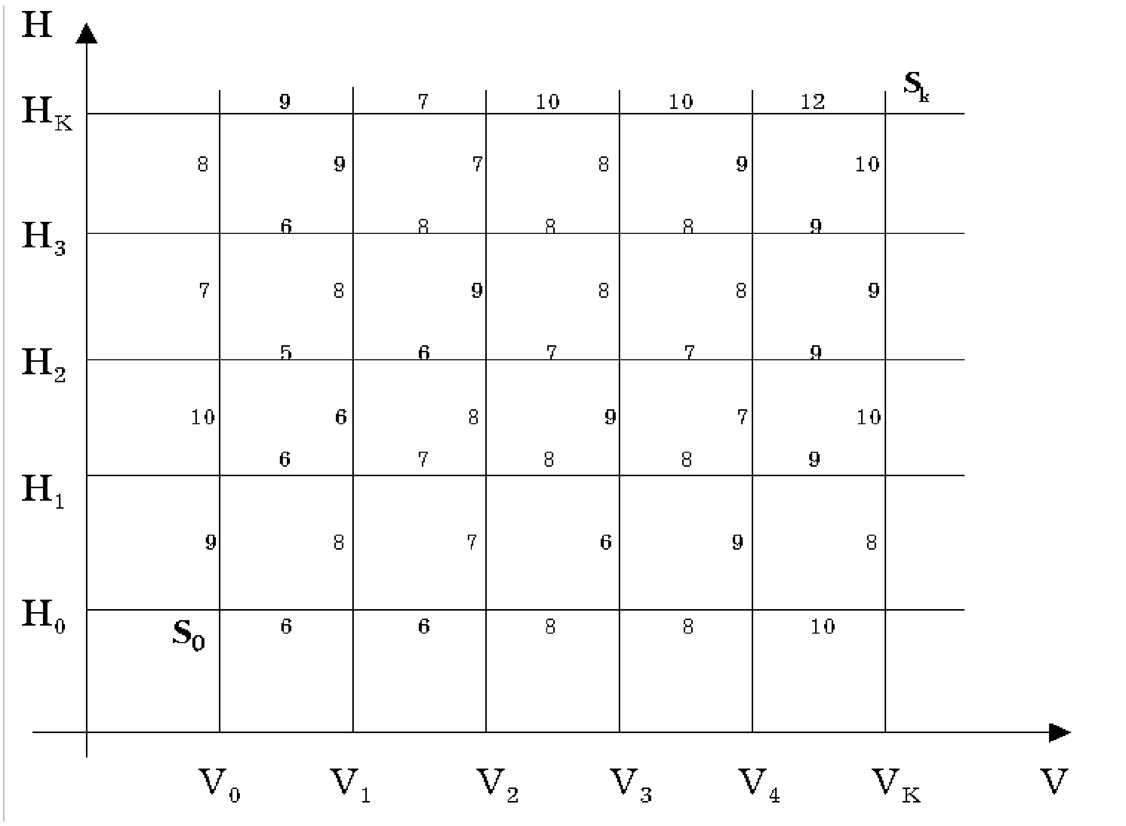
15.6. -shakl.

3. youyida A va V punktlarni tutashtiruvchi yo'llar to'ri tasvirlangan. A punktdan V punktgacha bo'lgan eng qisqa marshrutni aniqlang.



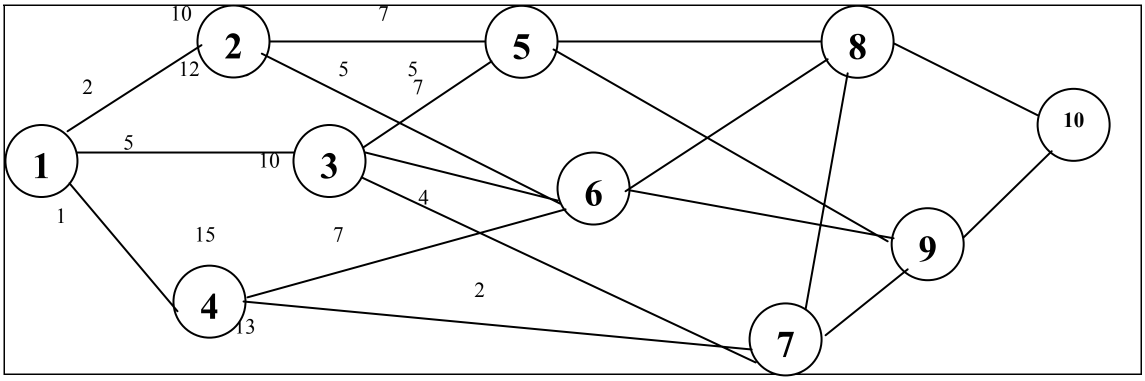
15.7. -shakl.

4. Samolyotning tezligi va balandligini boshqarish masalasini quyidagi shaklda tasvirlangan ma’lumotlar asosida eching va sarf qilinadigan eng kam yoqilg’i miqdorini aniqlang.



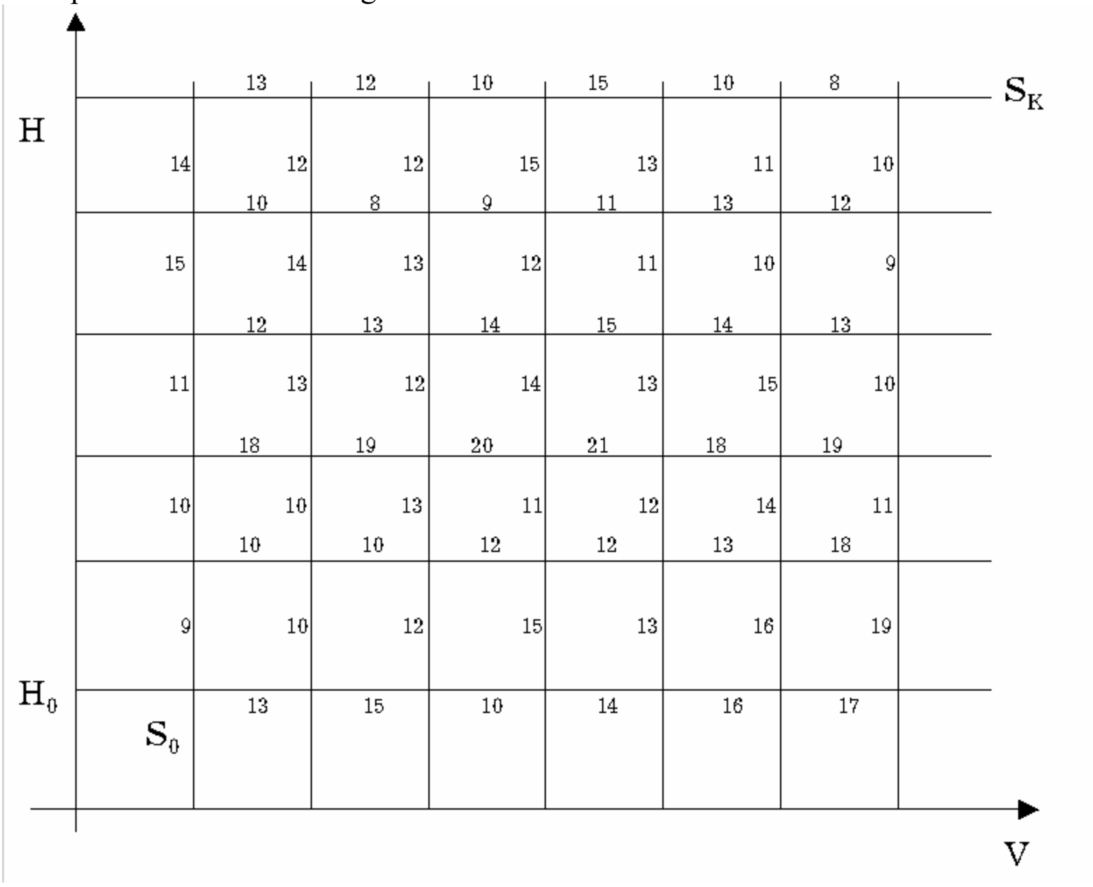
15.8. -shakl.

5. youyidagi shaklda keltirilgan ma’lumotlar asosida 1-10 punktlar orasidagi eng qisqa masofani aniqlang.



15.9. -shakl.

6. youyidagi shaklda keltirilgan ma’lumotlar asosida samolyotning uchishini optimal boshqarish masalasini eching.



15.10. -shakl.

16- mashg'ulot
Kapital mablag'larni optimal
taqsimlash masalasi.

Faraz qilaylik, birlashmadagi korxonalarni qayta ta'mirlash uchun X_0 miqdorda kapital mablag' ajratilgan bo'lsin. Bu mablag'ni birlashmadagi N (i=1,2,...,n) ta korxona orasida taqsimlash kerak bo'lsin. Agar i- korxonaga x_i mikdorda kapital mablag' ajratilgan bo'lsa uning oladigan daromadi $Z_i(x_i)$ bo'ladi, deb qabul qilamiz.

Birlashmaning daromadi korxonalar daromadlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

Kapital mablag'ni optimal taqsimlash masalasining matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n=X_0 \qquad (1)$$
$$x_i \geq\geq 0 \ (i=1,2,\ldots.,N) \qquad (2)$$
$$Z= Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+\ldots..+Z_n(x_n) \rightarrow max \qquad (3)$$

Bunday masalani echish uchun $F_1(x)$, $F_2(x)$,…..$F_n(x)$ funktsiyalar ketma-ketligini kiritamiz. Bu erda $F_1(x)$ $x \ (0 \le x \le X_0)$ miqdordagi mablag'ni faqat bitta korxonaga taqsimlashdan olinadigan maksimal daromadni, $F_2(x)$
$x \ (0 \le x \le X_0)$ miqdordagi mablag'ni 2 ta korxonada taqsimlashdan olinadigan maksimal daromadni va hokazo, $F_n(x)$ $x \ (0 \le x \le X_0)$ miqdordagi mablag'ni N ta korxonaga taqsimlashdan olinadigan maksimal daromadni bildiradi.

Ma'lumki, $F_N(x_0) = Z_{max}$ bo'ladi. Bundan tashqari quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$1)\ F_1(0) = 0 \qquad (4)$$
$$2)\ F_1(x) = Z_1(x), \qquad 0 \le x \le X_0. \qquad (5)$$

ya'ni kapital mablag' taqsimlanmasa hech qanday foyda olinmaydi. Agar $0 \le x \le X_0$ miqdordagi mablag' faqat bir korxonaga taqsimlansa, u holda birlashmaning daromadi ana shu korxona daromadidan iborat bo'ladi.

Agar $0 \le x \le X_0$ miqdordagi mablag' k ta korxona orasida taqsimlansa, u holda birlashmaning oladigan maksimal daromadi quyidagi funktsional tenglama yordamida topiladi:

$$F_k(x) = \max_{\substack{0 \le x_k \le x \\ 0 \le x \le X_0}} [\, Z_k(x_k) + F_{k-1}(x-x_k)] , \ (i = 1,2,\ldots N)(6)$$

N- bosqichda $F_N(X_0) = max\ Z$ topiladi. Demak, oxirgi bosqichda maqsad funktsiyaning maksimal qiymati $F_N(X_0)$ hamda *N* korxona uchun ajratiladigan kapital mablag'ning miqdori, ya'ni X_N^{κ} topiladi.

So'ngra hisoblash jarayoni teskari tartibda bajariladi. Bunda oxirgi qadamdan birinchi qadamgacha bir marta qarab chiqiladi:

N- korxonaga ajratiladigan X_N^k kapital mablag'ni bilgan holda qolgan *N-1* korxonalar orasida taqsimlanadigan $X_0 - X_N^k$ mablag'ning miqdori topiladi. So'ngra oldin topilgan

$$F_{N-1}(x) = \max_{\substack{0 \le x_{N-1} \le x \\ 0 \le x \le X_0}} [Z_{N-1}(x_{N-1}) + F_{N-2}(x-x_{N-1})]$$

tenglamadan $F_{N-1}(X_0-x_N{}^*)$ ni, va demak x_{N-1}^k ni topamiz, va hokazo. Shunday yul bilan davom etib oxirida x^*_1 ni topamiz.

Shu bilan chegaralangan kapital mablag' birlashmaning *N* ta korxonalari orasida optimal taqsimlangan bo'ladi.

1-misol. Faraz qilaylik, 200 birlik kapital mablag'ni birlashmadagi 4 ta korxona orasida taqsimlash kerak bo'lsin. ²ar bir korxona o'ziga ajratilgan mablag'ning miqdoriga bog'liq ravishda turli miqdordagi daromadga erishadi. Bu daromadlar quyidagi 1-jadvalga joylashtirilgan.

1-jadval

Korxonalarga ajratilgan mablag'lar miqdori	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	**$Z_2(x)$**	**$Z_3(x)$**	**$Z_4(x)$**
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Kapital mablag'ni korxonalararo optimal taqsimlash rejasini tuzing.

Echish. Masalani 4 ta bosqichga bo'lib echamiz. Dastlab N=1, ya'ni kapital mablag' faqat bitta korxonaga berilgan holni ko'ramiz. Bunda

$$F_1(x) = Z_1(x)$$

bo'ladi. $0 \le x \le 200 = X_0$ oraliqdagi har bir $x_{1k} = k\Delta$ lar uchun $F_1(X_{1k}) = Z_1(x)$ qiymatlarini 2-jadvalga joylashtiramiz.

2-jadval

X_{1k}	**$F_1(x_{1k})$**
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

Endi N= 2 bo'lgan holni, ya'ni X_0=200 birlik kapital mablag'ni 2 ta korxonaga taqsimlangan holni ko'ramiz.

Bu holda olinadigan daromad

$$F_2(x) = .\max_{\substack{0 \le x_2 \le x \\ 0 \le x \le X_0}} [Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

funktsional tenglama orqali topiladi. Bu funktsiyaning qiymatlari quyidagicha topiladi.

$0 \le x \le 200 = X_0$ oraliqdagi har bir x uchun $0 \le x_2 \le x_0$ topiladi va unga tegishli bo'lgan

$$Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)$$

hisoblanadi. So'ngra

$$F_2(x) = \max_{x} [Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

topiladi.

Masalan,

x=0 da x_2 =0 bo'ladi;

x=40 da x_2=0; 40 bo'ladi;

$x_2=0,\quad Z_2(0)+F_1(40)=15$
$x_2=40,\ Z_2(40)+F_1(0)=14+0 \quad F_2(x=40)=15$

$x=80$ da $\quad x_2 = 0;40;80$
$x_2=0,\quad Z_2(0)+F_1(80)=0+28$
$x_2=40,\quad Z_2(40)+F_1(40)=14+15 \quad F_2(x=80)=30$
$x_2=80,\quad Z_2(80)+F_1(0)=30+0$

va hokazo, shunday yul bilan X=120,160 va 200 bo'lgan hollar uchun $F_2(x=120)$, $F_2(x=160)$, $F_2(x=200)$ larni topamiz. $F_2(x)$ funktsiyani hisoblash jarayonini quyidagi 3-jadvalda ko'rsatamiz.

3-jadval

x \ x_2	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	X_2^*
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3- bosqichda N=3 bo'lgan holni, ya'ni $X_0=200$ kapital mablag' 3 ta korxona o'rtasida bo'lingan holni ko'ramiz. Bu holda erishiladigan daromadni har bir $0 \le x_3 \le X$, $0 \le x \le X_0=200$ uchun quyidagi funktsional tenglama orqali hisoblash kerak

$$F_3(x) = \max_{\substack{0 \le x_3 \le x \\ 0 \le x \le 200}} [Z_3(x_3) + F_2(x-x_3)]$$

Bu funktsiyani hisoblash jarayonini quyidagi
4- jadvalda ko'rsatamiz.

4-jadval

x \ x_3	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	X_3^*
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4- bosqichda N=4 bo'lgan holni, ya'ni $X_0=200$ kapital mablag' 4 ta korxonaga bo'lingan holni ko'ramiz. Bu holda erishilgan daromad

$$F_4(x) = \max_{\substack{0 \le x_4 \le x \\ 0 \le x \le 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x-x_4)]$$

funktsional tenglama orqali topiladi. Bu funktsiyani hisoblash jarayoni 5-jadvalda ko'rsatilgan.

5-jadval

x \ x_4	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	X_4^*
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 jadvallardagi *$F_1(x)$, $F_2(x)$,…, $F_4(x)$* larni va ularga mos ravishda x_1^*, x_2^*, x_3^* va x_4^* vektorlarni quyidagi 6-jadvalga joylashtiramiz.

x \ x_i^*	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Bu jadvaldan kapital mablag'ni optimal taqsimlash rejasini topamiz. 200 birlik mablag'ni 4 ta korxonaga taqsimlash natijasida birlashma

$$\max_{i=1,4} F_i(x=200)=\max(90,90,93,95)=95$$

birlik daromad oladi. Bunda to'rtinchi korxonaga 80 birlik mablag' beriladi va ortib qolgan 120 birlik mablag' qolgan 3 ta korxonaga taqsimlanadi. Bundan birlashma

$$\max_{i=1,3} F_i(x=220)=\max(60,60,60)=60$$

birlik daromad oladi. Bunda uchinchi korxonaga mablag' berilmaydi ($X_3^*=0$). Demak 120 birlik mablag' birinchi va ikkinchi korxonalarga taqsimlanadi. Lekin ikkinchi korxonaga ham mablag' berilmaydi ($X_2^*=0$). Shunday qilib, kolgan 120 birlik mablag' birinchi korxonaga beriladi. Bundan birlashma 60 birlik daromad oladi

$$x_1=120, \quad F_1(x)=60$$

Shunday qilib, kapital mablag'lar taqsimlashning optimal rejasini topdik:

$$X^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (120; 0; 0; 80)$$

Bu rejaga mos keluvchi umumiy daromadni tashkil qiladi.

Mustaqil echish uchun masalalar

1. 5000 shartli birlikdagi investitsiyani 3 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo'lsin. ²ar bir korxonaning o'ziga ajratilgan mablag' miqdoriga bog'liq ravishda oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Korxonalarga ajratiladigan investitsiyalar miqdori	**Korxonalar daromadi**		
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$
1000	1500	2000	1700
2000	2000	2100	2400
3000	2500	2300	2700
4000	3000	3500	3200
5000	3600	4000	3500

Javob: $X^*(2000;1000;2000)$, $Z^1_{max}=6400$

2. S=100 ming so'm investitsiyani 4 ta korxona orasida shunday taqsimlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo'lsin. ²ar bir korxonaning ajratilgan mablag' miqdoriga bog'liq ravishda oladigan daromadlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

Investitsiya hajmi (x_i) ming so'm	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Javob: $x_1^* =0$, $x_2^* =20$, $x_3^*=40$, $x_4^*=40$

3. Masalaning dastlabki shartlari quyidagi jadvalda keltirilgan. 100 mln.so'm pulni 4 ta korxona orasida shunday taqsimlash kerakki, olingan umumiy daromad maksimal bo'lsin.

Investitsiya hajmi (mln. so'm)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Javob : $X^*= (0;20;40;40)$, $Z_{max}=85$

4. 120 mln. so'm investitsiyani 4 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olingan umumiy daromad maksimal bo'lsin. Investitsiya hajmiga bog'liq ravishda korxonalarning oladigan daromadlari quyidagi jadvalga keltirilgan.

Investitsiya hajmi (mln. sum)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	**$Z_2(x)$**	**$Z_3(x)$**	**$Z_4(x)$**
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

Javob: $X^* = (0;40;40;40)$, $Z_{max}=97$.

17- mashg'ulot

Matritsali o'yinlar. O'yinning quyi va yuqori baholari. Matritsali o'yinning echimi. Matritsali o'yinni chiziqli programmalash usuli bilan echish.

²ar qanday a – summali juft o'yinni quyidagi matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning qatorlari I o'ynovchining mumkin bo'lgan A_1, A_2 … , A_m yurishlarini ustunlari esa II o'ynovchining mumkin bo'lgan V_1 , V_2, ... , V_n yurishlariga mos keladi. $A=(a_{ij})$ matritsa to'lovlar matritsasi yoki yutuq matritsasi deb ataladi. Matritsaning har bir a_{ij} elementi I o'ynovchi A_i yurishni tanlab, II o'ynovchi V_j yurishni tanlagandagi I o'ynovchining yutug'ini (II o'ynovchining yutqazuvini) anglatadi.

O'yinning maqsadi I o'ynovchini maksimal yutuqqa va II o'ynovchini minimal yutqazuvga erishishlarini ta'minlovchi eng ma'qul strategiyani tanlashdan iborat.

Agar I o'ynovchi biror A_i strategiyani tanlasa u hech bo'lmaganda

$$a_i = \min_j a_{ij}$$

yutuqqa erishadi. Buni hisobga olib bu o'ynovchi o'zining eng kam yutuqlarini maksimallashtiruvchi, ya'ni

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (1)$$

tenglikni ta'minlovchi yurishni tanlaydi.

Bu erda α kattalik I o'ynovchining garantiyalangan yutug'idan iborat bo'ladi va o'yinning quyi bahosi deb ataladi. Bu bahoni ta'minlovchi i_0 strategiya maxmin deb ataladi.

II o'ynovchi, o'z navbatida, o'zining eng katta mumkin bo'lgan yutqazuvlarini minimallashtiruvchi, ya'ni

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (2)$$

tenglikni ta'minlovchi yurishni tanlaydi β kattalik o'yining yuqori bahosiga deb ataladi: bu bahoni ta'minlovchi j_0 strategiya minimax deyiladi.

Agar $\alpha = \beta$ bo'lsa, ya'ni

$$V = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

tenglik bajarilsa, u holda V o'yinning bahosi deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi A matritsaning $a_{i_0 j_0}$ elementi

o'yinning egar nuqtasi deb ataladi.

Demak matritsali o'yin egar nuqtaga ega bo'lsa, uning echimini maxsmin va minimaxs usullari bilan topiladi.

1-misol. Berilgan matritsali o'yin uchun quyi va yuqori baholarni hamda o'yinning optimal bahosini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Matritsaning qatorlaridagi eng kichik elementlar quyidagidan iborat:

$$\min_j (3, \quad 1, \quad 2) = 1,$$
$$\min_j (2, \quad 4, \quad -1) = -1$$
$$\min_j (5, \quad 7, \quad 6) = 5$$

Demak o'yinning quyi bahosi

$$\alpha = \max_i(\min_j a_{ij}) = \max_i(1, \quad -1, \quad 5) = 5$$

bo'ladi. Endi har bir ustundagi eng katta elementlarni topamiz.

$$\max_i (3, \quad 2, \quad 5) = 5$$
$$\max_i (1, \quad 4, \quad 5) = 7$$
$$\max_i (2, \quad -1, \quad 6) = 6$$

U holda o'yinning yuqori bahosi quydagiga teng bo'ladi.

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min(5, \quad 7, \quad 6) = 5$$

Ushbu o'yindagi quyi va yuqori baholar o'zaro teng. Demak, o'yinning optimal bahosi

$V = \alpha = \beta = 5$ bo'ladi.

Ushbu bahoni (echimni) ta'minlovchi a_{31} element o'yinning egar nuqtasi va A_3 va V_1 strategiyalar optimal strategiya bo'ladi.

Agar yutuqlar matritsasi egar nuqtaga ega bo'lmasa, u holda maxmin va minimax usullar bilan o'yinning echimini topib bo'lmaydi. Bu holda o'yinning echimini topishda aralash strategiyalardan topiladi.

I o'ynovchining aralash strategiyasi deb komponentlari quyidagi

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad , \; x_i \geq 0 \;, \; i = \overline{1,\mathrm{m}} \qquad (4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi X=($x_1, x_2,..., x_m$) vektorga aytiladi. Bunda har bir x_i I o'ynovchining A_i yurishni tanlash ehtimolini bildiradi.

II o'ynovchining aralash strategiyasi deb komponentlari quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = \overline{1,\mathrm{n}} \qquad (5)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi Y=($y_1, y_2, ..., y_n$) vektorga aytiladi. Bunda har bir y_j II o'ynovchining B_j yurishni tanlash ehtimolini bildiradi.

Aralash strategiyalar usulida I o'ynovchi A_i yurishni tanlab, II o'ynovchi B_j yurishni tanlagandagi I o'ynovchining yutug'i sifatida uning yutishining matematik kutilishi olinadi, ya'ni u quyidagiga teng bo'ladi

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (6)$$

Agar I o'ynovchi o'zining X^*=($x^*_1, x^*_2, ..., x^*_m$) optimal strategiyasni qo'llasa, u holda II o'ynovchi qanday strategiyani tanlashidan qat'iy nazar, uning yutug'i o'yinning bahosi V dan kam bo'lmaydi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq V \;, \;\; j = \overline{1,\mathrm{n}} \qquad (7)$$

Xuddi shuningdek, agar II o'ynovchi o'zining

Y=(y^*_1, y^*_2, ..., y^*_n) optimal strategiyasini qo'llasa, u holda I o'ynovchi qanday strategiyani tanlashdan qat'iy nazar, uning yutqazuvi o'yinning bahosi V dan oshmaydi, ya'ni:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^*_j \le V \quad , \quad i=\overline{1,\mathrm{m}} \qquad (8)$$

Endi matritsali o'yinni chiziqli programmalash usuli bilan echish jarayonini ko'ramiz. Eng avval I o'ynovchining optimal aralash strategiyasi va o'yining bahosi V ni topamiz. Uning uchun (7) tengsizliklar sistemasini va (4) shartlarni umumlashtirib, quydagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge V \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge V \end{array}\right\} \qquad (9)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \qquad (10)$$

$$x_i \ge 0 \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (11)$$

O'yinning bahosi V ni musbat deb hisoblab, (V>0) (9) sistemaning hamma tengsizliklarini V ga bo'lib quyidagi sistema hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1 \\ a_{12}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{V}, \qquad (13)$$

$$t_i \ge 0 \qquad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (14)$$

$$бу\ ерда\ \ t_i = \frac{x_i}{V} \qquad (15)$$

I o'ynovchi o'z yutug'ini, ya'ni o'yinning bahosi V ni maksimum qilishga harakat qiladi. Demak, I o'ynovchi uchun

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{V},$$

eng kichik (minimum) qiymat qabul qilish kerak. Ushbu talablarda (12) - (14) sistema quyidagi chiziqli programmalash masalasiga aylanadi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_m \geq 0 \qquad (16)$$

$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \to \min \qquad (17)$$

Xuddi shunday yo'l bilan II o'ynovchining optimal aralash strategiyasi va V o'yinning bahosini topish uchun quyidagi chiziqli programmalash masalasini echish kerak.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq V \end{array}\right\} \quad (18)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0 \qquad (19)$$

$$F = \frac{1}{V} = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max \qquad (20)$$

(15)-(17) va (18-20) masalalar o'zaro ikkilangan chiziqli programmalash masalalaridan iborat bo'ladi. Ulardan ixtiyoriy birini echib, ikkilasini echimini osonlikcha topish mumkin.

2-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsali o'yinni aralash strategiyalardagi echimni toping.

Echish. I o'ynovchi uchun o'yinni chiziqli programmalash masalasiga aylantiramiz. Buning uchun eng avval quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq V \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq V \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq V \end{array}\right\} \quad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (22)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \qquad (23)$$

(21) sistemadagi har bir tengsizlikning ikki tomonini (V>0) ga bo'lib va $t_i = \frac{x_i}{V}$ belgilash kiritib quydagi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 &\ge 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 &\ge 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 &\ge 1 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V} \qquad (25)$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0 \qquad (26)$$

Bu sistemani quyidagi chiziqli programmalash masalasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 &\ge 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 &\ge 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 &\ge 1 \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0 \qquad (28)$$

$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \to \min \quad (29)$$

II o'ynovchi uchun berilgan matritsali o'yin quyidagi chiziqli programmalash masalasiga aylanadi.

$$\left.\begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 &\le 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 &\le 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 &\le 1 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0 \qquad (31)$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \to \max \quad (32)$$

(27)-(29) va (30)-(32) masalalar o'zaro ikkilangan masalalardir. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birini echib, ikkinchisining echimini osonlikcha topish mumkin.

Biz (30) - (32) masalani simpleks usuli bilan echamiz. Buning uchun uni normal holga keltirib, simpleks jadvalga joylashtiramiz:

$$\left.\begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 &= 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 + u_5 &= 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 + u_6 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$u_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$$

$$F_{\min} = -u_1 - u_2 - u_3$$

B.v	S.b	R_0	-1	-1	-1	0	0	0
			R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
R_4	0	1	5	3	2	1	0	0
R_5	0	1	3	5	5	0	1	0
R_6	0	1	$\boxed{6}$	3	4	0	0	1
Δ_j		0	1	1	1	0	0	0
R_4	0	1/6	0	1/2	-4/3	1	0	-5/6
R_5	0	1/2	0	$\boxed{7/2}$	3	0	1	-1/2
R_1	-1	1/6	1	1/2	2/3	0	0	1/6
Δ_j		-1/6	0	1/2	1/3	0	0	-1/6
R_4	0	2/21	0	0	-25/21	1	-1/7	-16/21
R_2	-1	1/7	0	1	6/7	0	2/7	-1/7
R_1	-1	2/21	1	0	5/21	0	-1/7	5/21
Δ_j		-5/21	0	0	-2/21	0	-1/7	-2/21

Optimal echim :

$$U = \left(\frac{2}{21}; \quad \frac{1}{7}; \quad 0 \right)$$

$$F_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{5}{21}$$

$$V = \frac{21}{5}$$

$$y_1 = V \cdot U_1 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$y_2 = V \cdot U_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = V \cdot U_3 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$Y = \left(\frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad 0 \right)$$

Endi I- o'ynovchi uchun optimal aralash strategiyani topamiz. Buning uchun (30) - (32) masalaga ikkilangan masala echimini topamiz:

$$T = (t_1; \quad t_2; \quad t_3) = \left(0; \quad \frac{1}{7}; \quad \frac{2}{21} \right)$$

hamda quyidagi munosabatlar asosida X=(x_1 , x_2 , x_3) aralash strategiya topamiz:

$$x_1 = V \cdot t_1 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = V \cdot t_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$x_3 = V \cdot t_3 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Javob: $X^* = \begin{pmatrix} 0; & \frac{3}{5}; & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ $\quad Y^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}; & \frac{3}{5}; & 0 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{21}{5}$$

Mustaqil echish uchun masalalar

I. youyidagi matritsali o'yinlarni minimax va maxmin usullari bilan eching.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$жавоб \cdot X = (0; \quad 0; \quad 1), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0), \qquad V = 5$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$жавоб. \quad X = (0; \quad 1; \quad 0; \quad 0), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0; \quad 0) \quad , V = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $жавоб. \quad X = (1; \quad 0; \quad 0) \quad , \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0)$

$ёки \quad X = (0; \quad 2; \quad 0), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0) \; V = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

4. $жавоб. \quad X = (1; \quad 0; \quad 0) \quad , \quad Y = (1; \quad 0; \quad 0)$

$ёки \; X = (0; \quad 0; \quad 1) \; , \quad Y = (1; \quad 0; \quad 0) \quad V = 3$

II .youyidagi maritsali o'yinlarni chiziqli programmalash usullari bilan echin:

1. $$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^*=(0;\ \ \frac{3}{4};\ \ \frac{1}{4})$; $Y^*=\left(\frac{1}{2};\ \ 0;\ \ \frac{1}{2};\ \ 0\right)$ $V=\frac{5}{2}$

2 $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^*=\left(\frac{3}{4};\ \ \frac{1}{4}\right)$; $Y^*\left(\frac{1}{4};\ \ \frac{3}{4};\ \ 0\right)$ $V=\frac{7}{4}$

3

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^*=\left(\frac{1}{4};\ \ \frac{1}{2};\ \ \frac{1}{4}\right)$ $Y^*=\left(\frac{1}{4};\ \ \frac{1}{2};\ \ \frac{1}{4}\right)$ $V=0$

4

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^*=\left(\frac{1}{7};\ \ \frac{6}{7};\ \ 0\right)$ $Y^*=\left(\frac{3}{7};\ \ \frac{4}{7};\ \ 0\right)$ $V=\frac{4}{7}$

5.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^*=\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$ $Y^*=\left(\frac{1}{5};\ \ 0;\ \ \frac{4}{5}\right)$ $V=\frac{23}{5}$

6.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^*=\left(0;\ \ \frac{1}{3};\ \ 0;\ \ \frac{2}{3}\right)$ $Y^*=\left(\frac{2}{3};\ \ \frac{1}{3}\right)$ $V=7$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = (0;\quad 0;\quad 1)\qquad Y^* = (0;\quad 1;\quad 0)\quad V = 7$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = \left(\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2};\quad 0\right)\qquad Y^* = \left(\frac{3}{4};\quad 0;\quad 0;\quad \frac{1}{4}\right)\quad V = \frac{13}{4}$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = \left(\frac{2}{5};\quad 0;\quad \frac{3}{5}\right)\qquad Y^* = \left(\frac{1}{5};\quad \frac{4}{5};\quad 0\right)\quad V = \frac{17}{5}$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = \left(0;\quad \frac{3}{5};\quad \frac{2}{5};\quad 0\right)\qquad Y^* = \left(0;\quad \frac{3}{5};\quad \frac{2}{5};\quad 0\right)\quad V = 3$

18- mashg'ulot
Tabiatga qarshi o'yin.

"Tabiat"ga qarshi o'yinda "tabiat" va echim qabul qiluvchi shaxs (EyoyoSh) qatnashadi. Tabiatning $T_1, T_2, \ldots T_n$ hollari mavjud bo'lib, ularga qarshi EyoyoShning m-ta $A_1, A_2, \ldots A_m$ tadbirlari mavjud. Tabiatga qarshi o'yinni quyidagi matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

A_i \ T_j	T_1	T_2	…	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Bu erda a_{ij} - tabiatning T_j holatiga qarshi EyoyoShning A_i chora tadbirini amalga oshirgandagi ko'radigan foydasi yoki zararini ifodalaydi. Agar a_{ij} - foyda (yutuq) bo'lsa, u holda bu matritsa «yutuqlar matritsasi» deyiladi. Agar a_{ij}- yutkazuv (zarar)ni ifodasi bo'lsa. Ushbu matritsa «to'lovlar matritsasi» deb ataladi. «Yutuqlar matritsasi» asosida EyoyoSh o'zining foydasini maksimallashtiruvchi yo'lni (sof strategiyani) tanlaydi. «To'lovlar matritsasi» asosida esa u o'zining zararini minimallashtiruvchi yo'lni tanlaydi. Bunday sof strategiyalarni tanlash uchun Laplas, Bayes, Vald Sevidj va Gurvits mezonlaridan foydalaniladi.

1. **Laplas mezonida** tabiatning barcha holatlari teng ehtimolli deb hisoblanadi, ya'ni $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 1/n$

deb qabul qilinadi. U holda EyoyoSh A_i qo'llagandagi yutug'i quyidagiga teng bo'ladi:

$Q_i = \frac{1}{n}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in})$ $(i=\overline{1,m})$ bo'ladi. (1)

EyoyoSh maksimal foyda (minimal zarar) beruvchini tanlaydi.

2. **Bayes mezonida** tabiatning har bir T_j holati ma'lum P_j ehtimol bilan ro'y berishi aniqlangan bo'ladi. U holda EyoyoShning A_i yo'lini (strategiyani) tanlangandagi yutug'i quyidagiga teng bo'ladi:

$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$ $(i=\overline{1,m})$ (2)

EyoyoSh max Q_i (min Q_i) beruvchi yo'lni tanlaydi.

3. **Vald mezoni** maksimin – minimaks usulidan iborat. Bunda EyoyoSh

$\max(\min a_{ij})$ $[\min(\max a_{ij})]$ (3)
ta'minlovchi yo'lni tanlanadi

4. **Sevidj mezoni** ham minimax – maxmin printsipiga asoslangan bo'lib, unda (**a_{ij}**) – yutuqlar (to'lovlar) matritsasi o'rniga «tavakkalchilik matritsasi» deb ataluvchi (**r_{ij}**) matritsa ishlatiladi. Bu matritsani elementlari quyidagicha topiladi:

$r_{ij}=\max a_{ij} - a_{ij}= \beta - a_{ij}$ **,** agar a_{ij} – yutuq bo'lsa, (4)

$r_{ij}= a_{ij} - \min a_{ij}= a_{ij} - \beta$, agar a_{ij} **-** yutqazuv bo'lsa, (5)

5. **Gurvits mezoni** yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan optimal strategiya sifatida quyidagi shartni qanoatlantiruvchi strategiya tanlanadi.

a_{ij} – daromadni bildirganda:

$$\gamma = \max\left[\alpha \max_{j} a_{ij} + (1-\alpha)\min_{j} a_{ij}\right], \alpha \in [0,1] \quad (6) \quad \text{qoida}$$

a_{ij} – yutuqni (zararni) bildirganda:

$$\gamma = \min_{i}\left[\alpha \min_{j} a_{ij} + (1-\alpha)\max_{j} a_{ij}\right], \ \alpha \in [0,1] \quad (7)$$

Bu erda α echim qabul qilish jarayonini sub'ektiv baholovchi parametr. Agar X=1 bo'lsa vaziyat og'ir bo'lgan bo'ladi va uni to'g'rilash uchun chora-tadbirlarni qo'llash kerak bo'ladi. X=0 bo'lganda vaziyat juda yaxshi va unga hech qanday chora tabdirlar qo'llash zarur bo'lmaydi.

1- misol. youyidagi yutuqlar matritsa ko'rinishida berilgan tabiatga qarshi o'yinni Laplas, Vald, Sevidj mezonlari yordamida eching.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	5	8	18
A_2	10	6	4	12
A_3	2	1	3	16
A_4	5	13	5	1

Echish: Laplas mezoni bo'yicha o'yinni echish uchun tabiatning T_1 , T_2 , T_3 , T_4 holatlari teng ehtimol bilan ro'y beradi, ya'ni $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/4$ deb qabul qilib quyidagi jadvalni tuzamiz:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$Q_i = (a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in})Ri$
A_1	1	5	8	13	$\frac{1}{4}$ (1+5+8+18)=27/4
A_2	10	6	4	12	$\frac{1}{4}$ (10+6+4+12)=8
A_3	2	1	3	16	$\frac{1}{4}$ (2+1+3+16)=22/4
A_4	5	13	5	1	$\frac{1}{4}$ (5+13+5+1)=6
Ri	1/4	1/4	1/4	1/4	max $Q_i = 8$

Demak, bu usulda EyoyoSh eng katta (8) yutuqni ta'minlovchi A_2 sof strategiyani tanlaydi.

Vald mezoni bo'yicha o'yinni echish jarayonini quyidagi jadvalda tasvirlaymiz:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	min a_{ij}
A_1	1	5	8	18	1
A_2	10	6	4	12	4
A_3	2	1	3	16	1
A_4	5	13	5	1	1
					$\max\limits_i(\min\limits_j a_{ij}) = 4$

Bu mezon bo'yicha ham eng katta yutuqni ta'minlovchi strategiya A_2 ekan.

Sevidj mezonini qo'llab o'yinni echishdan avval tavakkalchilik matritsasini tuzamiz. Uning elementlarini (4) formula yordamida topamiz:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max\limits_j (r_{ij})$
A_1	9	8	0	0	9
A_2	0	7	4	6	7
A_3	8	12	5	2	12
A_4	5	0	3	17	17
					$\min\limits_i(\max\limits_j r_{ij}) = 7$

Demak, tavakkalchilikdan ko'radigan zararni minimallashtiruvchi eng yaxshi strategiya A_2 dan iborat ekan.

Ushbu o'yin Bayes mezoni asosida echish uchun tabiatning T_1 holati 0,2 ehtimol bilan T_2 , T_3 , T_4 , holatlari esa mos ravishda 0,3; 0,4; 0,1 ehtimollar bilan ro'y beradi deb faraz qilamiz. U holda o'yinni echish quyidagi jadvalda ko'rsatilganidek topiladi:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$
A_1	1	5	8	18	6,7
A_2	10	6	4	12	6,6
A_3	2	1	3	16	3,5
A_4	5	13	5	1	7
P_j	0,2	0,3	0,4	0,1	$\max Q_i = 7$

Demak, Bayes mezoni asosida eng optimal strategiya A_4 ekan.

Gurvits mezonini qo'llash uchun echim qabul qilish jarayoni o'rtacha, ya'ni X=0,5 deb qabul qilamiz va hisoblash jarayonini quyidagi ko'rinishdagi jadvalda bajaramiz:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	γ
A_1	1	5	8	18	1	18	9,5
A_2	10	6	4	12	4	12	8
A_3	2	1	3	16	1	16	8,5
A_4	5	13	5	1	1	13	7
							$\max\limits_i \gamma = 9{,}5$

Ushbu mezon bo'yicha optimal strategiya eng katta ko'rsatkichni beruvchi A_1 strategiya ekanligi aniqlanadi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo'lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo'lsin. Endi savdo korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda korxonaning ko'radigan zarari minimal bo'ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo'l), 30% (A_2 yo'l), 40% (A_3 yo'l), 50% (A_i yo'l) tushirish mo'ljallaydi. Bu yo'llarni EyoyoShning strategiyalari deb qaraymiz. «Tabiat»ning ikkita yo'li bor: 1) Tabiatning kam egiluvchanligi (T_1 yo'l); 2) Tabiatning ko'p egiluvchanligi (T_2 yo'l). Ana shularni nazarga olib to'lovlar matritsasi tuzilsin va o'yinning echimini turlicha mezonlar asosida topilsin.

2. youyidagi jadvalda berilgan ma'lumotlar asosida yutuqlarni maksimallashtiruvchi strategiyani Bayes mezoni asosida toping:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
R_i	0,2	0,7	0,1

Javob: A_2 ; 26,2

3. youyidagi yutuqlar matritsasi yordamida berilgan o'yinni
a) tabiatning turli holatlari noma'lum bo'lgan;
b) tabiatning turli holatlarining ro'y berishi ehtimollari
$R_1=0,5$, $R_2=0,3$ va $R_3=0,2$ bo'lgan hollar uchun eching.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	7	5	6
A_2	9	2	8
A_3	3	5	4
R_i	0,5	0,3	0,2

Javob: a) A_2; $6\frac{1}{3}$

b) A_2; 6,7

4. Fabrika uch xil A_1 , A_2 , A_3 mahsulotlar ishlab chiqaradi. Korxonaning daromadi ishlab chiqarilgan mahsulotga bo'lgan talabga bog'liq ravishda quyidagi yutuqlar matritsasi ko'rinishida berilgan.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	6	8	4
A_2	5	7	9
A_3	8	3	2

Eng katta daromad keltiruvchi mahsulot ishlab chiqarish rejasini toping.

Javob: A_2 mahsulot ishlab chiqarsa, korxona daromadi 7 birlik bo'ladi.

5. “”Tabiat” bilan o'yin quyidagi to'lovlar matritsasi orqali berilgan:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Vald, Sevidj va Gurvits mezonlari (α=0,6 bo'lgan holda) bilan o'yinning echimini toping.

6. Mamlakatda 4 xil elektrostantsiyalar qurilishi mo'ljallangan tabiatning turli hollarida elektrostantsiyalarni qurish samaradorligi quyidagi yutuqlar matritsasi ko'rinishida berilgan:

a)

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

b)

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	20	30	15
A_2	75	20	35
A_3	25	80	25
A_4	85	5	45

v)

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	0	4	-1	3
A_2	1	0	2	2
A_3	3	1	-2	-1