

**Ўзбекистон Республикаси  
Олий ва Ўрта Махсус Таълим  
Вазирлиги**

**Тошкент Молия Институтини**

**«МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ»  
фанидан  
масалалар тўплами**

**Тошкент – 2003 й.**

**Тузувчилар:** проф. Қ. Сафаева,  
доц. Э. Мамуров,  
кат.ўқит.Ш. Бобожонов,  
ассис. Ф. Шомансурова.

**Такризчилар:** доц. Х.Жумаев,  
доц. Т. Адиров.

Тошкент молия институти илмий-услугий  
кенгаши қарори асосида чоп этилди.

## Сўзбоши

Мазкур масалалар тўплами иқтисодий олий ўқув юртининг бакалавриат йўналишидаги талабалари учун «Математик программалаш» фанидан тузилган намунавий ўқув дастурлар асосида яратилган. Ҳар бир ўтилган назарий маъруза мавзусини талабалар томонидан амалий жиҳатдан мустаҳкамлаш мақсадида, тўпламга киритилган масалалар мавзулар бўйича амалий машғулотларга бўлинган. Кўпчилик машғулотларда шу машғулот мавзусига оид қисқача назарий маълумотлар ва типик масалаларнинг ечиш намуналари келтирилган.

Тақдим этилаётган масалалар тўпамидан амалий машғулот дарсларидан ташқари, талабаларнинг мустақил таълим жараёнларида ҳам фойдаланиш мумкин. Қўлланма бўйича билдирилган таклиф ва фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар олдиндан ўз миннатдорчиликларини билдириб қоладилар.

## 1- машғулот

### Чизиқли моделлар. Чизиқли программалаш масалалари.

1. Корхонада А, В ва С маҳсулотларни тайёрлаш учун токарлик, фрезерлик, пайвандлаш ва силлиқлаш ускуналаридан фойдаланилади. Ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун сарфланадиган вақт нормаси, ҳар бир ускунанинг умумий иш вақти фонди, ҳамда ҳар бир турдаги бирлик маҳсулотни сотишдан олинадиган даромад ҳам 1- жадвалда келтирилган.

1-жадвалда

Ускуналар	Ҳар бир турдаги маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарфланадиган вақт (станок-соат)			Усқунанинг умумий иш вақти фонди (соат)
	А	В	С	
Токарлик	1	8	6	280
Фрезерлик	2	4	5	120
Пайвандлаш	7	4	5	240
Силлиқловчи	4	6	7	360
Даромад (шартли бирлик)	10	14	12	

Корхона маҳсулотларни сотишдан оладиган даромад энг кўп бўлиши учун қайси турдаги маҳсулотдан қанча ишлаб чиқариш кераклигини аниқлаш талаб қилинади. Масаланинг математик моделини тузинг.

Ечилиши: Айтайлик, корхона  $x_1$  дона А,  $x_2$  дона В ва  $x_3$  дона С маҳсулот тайёрлашни режалаштирган бўлсин. У ҳолда, шунча миқдордаги маҳсулотни тайёрлаш учун  $10x_1 + 8x_2 + 6x_3$  станок-соат токарлик ускунасининг вақти сарфланади.

Токарлик ускунасидан фойдаланиш вақти жами 280 соатдан ошмаслиги керак, яъни

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$$

тенгсизлик бажарилиши лозим.

Худди шунга ўхшаш мулоҳазалар билан фрезерлик, пайвандлаш ва силлиқлаш ускуналаридан фойдаланиш вақтига нисбатан қуйидаги тенгсизликлар ҳосил бўлади.

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360$$

Тайёрланадиган маҳсулотлар сони манфий бўла олмайди, шу сабабли

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Шунингдек, агар  $x_1$  бирлик А,  $x_2$  бирлик В ва  $x_3$  бирлик С маҳсулот тайёрланса, уларни сотишдан корхона оладиган жами даромад  $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$  шартли бирликни ташкил этади.

Шундай қилиб, қуйидаги математик масалага келамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360 \end{cases} \quad (1)$$

системани қаноатлантирувчи шундай

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad (2)$$

номаълумларни топиш керакки, улар

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \quad (3)$$

функцияга максимал қиймат берсин.

Юқорида келтирилган (1), (2) ва (3) муносабатлар берилган масаланинг математик моделини ифодалайди.

2. Чорва молларини тўйимли озиклантириш учун ҳар чорва моли бир кунда А озуқа моддасидан камида 60 бирлик, В озуқадан камида 50 бирлик ва С озуқа моддасидан камида 12 бирлик қабул қилиши керак. Кўрсатилган озуқа моддалар 3 хил турдаги ем маҳсулотлари таркибида мавжуд. Ҳар 1 кг ем маҳсулоти таркибидаги озуқ моддаларнинг миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган:

Озуқ моддалар	1кг ем маҳсулоти таркибидаги озуқ моддалар миқдори		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Агар 1 кг I, II ва III турдаги ем маҳсулотларининг баҳоси мос равишда 9, 12 ва 10 шартли бирликдан иборат бўлса, баҳоси энг арзон бўлган ҳамда зарур тўйимлиликка эга бўлган кунлик рацион қандай бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Ечилиши: Кунлик рацион таркибидаги I хил ем миқдори  $x_1$ , II хилиники  $x_2$  ва III хил ем миқдори  $x_3$  бўлсин. У ҳолда рационнинг зарур тўйимлиликка эга бўлиши талаби қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12 \end{cases} ,$$

Ўз маъносига кўра  $x_1, x_2, x_3$ , номаълумлар манфий бўла олмайди, яъни:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Кунлик рационнинг умумий баҳоси эса

$$F = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3$$

функция билан ифодаланади.

Шундай қилиб, қаралаётган масаланинг математик модели қуйидаги муносабатлардан иборатди:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60 & , \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50 & , \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12 & , \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad (5)$$

$$F = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \min. \quad (6)$$

3. Ўлчами  $6 \times 13 \text{ м}^2$  бўлган ту누ка материалларини шундай қирқиш керакки, унда икки хилдаги қирқимлар, яъни ҳар бири  $4 \times 5 \text{ м}^2$  ўлчамли 400 та, ҳар бири  $2 \times 3 \text{ м}^2$  ўлчамли 800 та қирқимлар ҳосил бўлсин. Ҳар бир туноқани қирқиш усуллари ва бунда олинadиган турли ўлчамдаги қирқимлар сони қуйидаги жадвалда берилган.

Қирқимлар ўлчами ( $\text{м}^2$ )	Туноқани қирқиш усуллари			
	I	II	III	IV
4x5	3	2	1	0
2x3	1	6	9	13

Умумий сони кўрсатилган миқдордан кам бўлмаган ва энг кам чиқиндига эга бўлган қирқимлар тайёрлаш режасини топинг. Масалани математик моделини тузинг.

Ечилиши: Масаланинг номаълумларини белгилаймиз:

$x_1$ - I усулда,  $x_2$ - II усулда,  $x_3$ - III усулда ва  $x_4$ - IV усулда қирқиладиган туноқалар сони бўлсин. Унда,  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

бўлиши кераклиги равшандир.

Агар битта туноқа донаси I усулда қирқилса, ундан  $6 \times 13 \text{ м}^2 - (3(4 \times 5) + 2 \times 3) \text{ м}^2 = 78 \text{ м}^2 - 66 \text{ м}^2 = 12 \text{ м}^2$  чиқинди ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш, II усулда қирқилса,  $78 \text{ м}^2 - (2(4 \times 5) + 6(2 \times 3)) \text{ м}^2 = 78 \text{ м}^2 - 76 \text{ м}^2 = 2 \text{ м}^2$  чиқинди, III усулда  $78 \text{ м}^2 - 74 \text{ м}^2 = 4 \text{ м}^2$  ва IV усулда чиқинди ҳосил бўлмайди. Туноқаларни қирқишда ҳосил бўладиган жами чиқиндилар миқдори  $F = 12x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4$  йиғиндидан иборат бўлиб, мақсадимиз уни минималлаштиришдир. Масаланинг математик модели қуйидагича

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 800 & , \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 400 & , \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \quad (8)$$

$$F = 12x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min. \quad (9)$$

Юқорида кўрсатилган масалаларнинг математик моделларида (1), (2), (4), (5), (7), (8) шартлар чегаравий шартлар ва (3), (6), (9) функциялар эса мақсад функцияси деб аталади.

4. Дейлик,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  хўжаликлар  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  пунктларни ҳар куни мос равишда 40, 50, 30 центнер сут билан таъминлаши керак бўлсин. Истеъмолчи пунктларининг маҳсулотга бўлган бир кунлик талаби ва 1 центнер сутни истеъмолчиларга етказиб бериш учун сарфланадиган транспорт харажатлари қуйидаги жадвалда берилган.

Хўжаликлар	1ц. сутни ташиш харажатлари				Ташиш учун мўлжалланган сут ҳажми (ц)
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	3	2,5	3,5	4	40
$A_2$	2	4,5	5	1	50
$A_3$	6	3,8	4,2	2,8	30
Истеъмолчилар талаби (ц)	20	40	30	30	120

Хўжаликлардан истеъмолчиларга сут ташишнинг шундай режасини топингки, бунда хўжаликлардан барча сут ташиб кетилсин, истеъмолчиларнинг талаби тўла қондирилсин, ҳамда жами ташиш харажатлари энг кам бўлсин. Масаланинг математик моделини тузинг.

Ечилиши: Бу масалада  $x_{ij}$  –орқали  $i$ -хўжаликдан  $j$ -истеъмолчи пунктга ташиш режалаштирилган сут миқдорини белгилаймиз. Хўжаликлардаги жами сут ҳажми ва истеъмолчиларга зарур бўлган жами сут миқдори бир-бирига тенг бўлиб, 120 центнерни ташкил этади.

Демак, хўжаликлардаги жами сут миқдори бутунлай ташиб кетилиши ва истеъмолчиларнинг талаблари тўлалигича қондирилиши керак бўлади. (10.1 ва 10.2-муносабатлар)

Маъносига кўра  $x_{ij}$  номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4).$$

Сутни ташишдаги жами транспорт харажатлари

$$3x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4,5x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3,8x_{32} + 4,2x_{33} + 2,8x_{34}$$

йиғинди билан ифодаланади. Шундай қилиб, ушбу масаланинг математик модели қуйидаги муносабатлардан иборатдир:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30 \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \end{cases} \quad (10.2)$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \dots, x_{34} \geq 0 \quad (11)$$

$$F = 3x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4,5x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3,8x_{32} + 4,2x_{33} + 2,8x_{34} \rightarrow \min \quad (12)$$

Бу моделдаги (10.1) муносабат хўжаликлардаги жами сут миқдори бутунлай ташиб кетилишни ва (10.2) муносабат эса истеъмолчиларнинг талаблари тўла қондирилишини ифодалайди.

Биз баъзи содда иқтисодий масалалар математик моделларининг намуналари сифатида келтирган юқоридаги масалаларда чегаравий

шартлар чизиқли тенгсизлик ёки тенгламалар системасидан, ҳамда мақсад функциялари ҳам чизиқли функциялар бўлганлиги учун улар чизиқли программалаш масалалари деб аталади.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Қандолатчилик фабрикаси 3 турдаги А, В ва С карамелларни ишлаб чиқариш учун 3 турдаги хом ашёдан, яъни шакар, мева қиёми ва шиннидан фойдаланади. Ҳар бир турдаги карамелдан 1 т ишлаб чиқариш учун сарфланадиган турли хом ашёлар миқдори (нормалари) қуйидаги жадвалда келтирилган. Шунингдек, жадвалда фабрика ишлатиши мумкин бўлган ҳар бир турдаги хом ашёларнинг умумий миқдори ва ҳар бир турдаги карамелнинг 1 тоннасини сотишдан олиннадиган даромад ҳам келтирилган.

Хом ашё тури	1т. карамел учун сарфла-надиган хом ашё нормаси (т)			Хом ашёнинг умумий миқ-дори (тонна)
	А	В	С	
Шакар	0,8	0,5	0,6	800
Шинни	0,4	0,4	0,3	600
Мева қиёми	-	0,1	0,1	120
1т маҳсулотни сотишдан кела-диган даромад (шартли бирлик)	108	112	126	

Фабриканинг оладиган даромадини максималлаштирувчи карамель ишлаб чиқариш режаси топиш масаласининг математик модели тузилсин.

2. Сутни қайта ишлаш заводи шиша идишларда қадоқланган сут, кефир, қаймоқ ишлаб чиқаради. 1 тоннадан сут, кефир, қаймоқ ишлаб чиқариш учун мос равишда 1010 , 1010 ва 9450 кг сут зарур бўлади. Бунда 1 тонна сут ва кефир тайёрлашда мос равишда 0,18 ва 0,19 машина-соат иш вақти сарфланади. 1 тонна қаймоқ тайёрлаш учун махсус автоматлар 3,25 соат ишлайди. Завод сут маҳсулотларини ишлаб чиқариш учун ҳаммаси бўлиб 136000 кг сут ишлатиши мумкин. Асосий ишлаб чиқариш жиҳозлари 21,4 машина-соат, қаймоқ қуйиш автоматлари эса 16,25 соат ишлаши мумкин. 1 тонна сут, кефир ва қаймоқни сотишдан олиннадиган даромад мос равишда 30, 22 ва 136 бирликка тенг. Завод бир кунда 100 тоннадан кам бўлмаган миқдорда шиша идишга қадоқланган сут ишлаб чиқариши керак. Маҳсулотнинг бошқа тур-

лари учун чегаралар йўқ. Завод ҳар куни маҳсулотни қандай миқдорда ишлаб чиқарса, уни сотишдан келадиган даромад максимал бўлади? Масаланинг математик модели тузилсин.



3. Тикув фабрикасида 4 турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун 3 артикулдаги газламалар ишлатилади. Турли маҳсулотнинг биттасини тикиш учун сарфланадиган турли артикулдаги газламалар нормаси жадвалда келтирилган. Фабрика ихтиёридаги ҳар бир артикулдаги газламаларнинг умумий миқдори ва маҳсулотлар баҳоси ҳам ушбу жадвалда берилган. Фабрика ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча миқдорда ишлаб чиқарса, ишлаб чиқарилган маҳсулотлар баҳоси максимал бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Газлама артикули	1 та маҳсулотга сарфланадиган газлама нормаси (м)				Газламаларнинг умумий миқдори (м)
	I	II	III	IV	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Маҳсулотлар ба-ҳоси (минг сўм)	9	6	4	7	

4. Корхона 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқаришда: токарлик, фрезерлик ва силлиқлаш жихозларидан фойдаланади. Ҳар бир турдаги жихознинг маҳсулот бирлигини ишлаб чиқаришга сарфлайдиган вақт нормаси жадвалда келтирилган. Ҳар бир турдаги жихознинг умумий иш вақти фонди, ҳамда турли маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган даромад ҳам ушбу жадвалда берилган.

Жихоз тури	Ҳар бир турдаги бир бирлик маҳсулот ишлаб чиқаришга сарфланадиган вақт				Умумий иш вақти фонди (станок-соат)
	I	II	III	IV	
Токарлик	2	1	1	3	300
Фрезерлик	1	-	2	1	70
Силлиқлаш	1	2	1	-	340
Бир бирлик маҳсулот сотишдан келадиغان даромад (ш.б.)	8	3	2	1	

Энг кўп даромад келтирадиган ишлаб чиқариш режасини топиш масаласининг математик модели тузилсин.

5. Корхона 3 турдаги маҳсулотни ишлаб чиқармоқда. Ишлаб чиқаришнинг бир ойлик дастурига асосан корхона 2000 та 1- турдаги, 1800 та 2 – турдаги ва 1500 та 3 – турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Маҳсулот ишлаб чиқариш учун бир ойлик харажати 61000 кг дан ошмайдиган хом ашё ишлатилмоқда. 1 – турдаги маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун 8 кг хом ашё, 2- турдаги маҳсулот бирлиги учун 10 кг, 3 – турдаги маҳсулот учун эса 11 кг сарф қилинади. 1- турдаги маҳсулотнинг улгуржи баҳоси 70 сўм, 2- ва 3 - маҳсулотлариники эса мос равишда 100 ва 70 сўмни ташкил қилади. Корхонага максимал даромад келтирадиган маҳсулот ишлаб чиқаришнинг оптимал режаси топилсин.

6. Механика заводи 2 турдаги детални ишлаб чиқариш учун токарлик, фрезерлик ва пайвандлаш жихозларини ишлатади. Шу борада ҳар бир детални 2 хил технологик усул билан ишлаб чиқариш мумкин. Ҳар бир жихознинг вақт фонди берилган. Ҳар бир технологик усул билан турли мосламада деталлар бирлигини ишлаб чиқариш учун

сарфланадиган вақт харажати нормаси ва деталлар бирлигини ишланишидан олинадиган фойдалар қуйидаги жадвалда келтирилган. Корхонага максимал фойдани таъминловчи жиҳозлар юкланишининг оптимал режасини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Жиҳоз тури	Деталлар				Самарали вақт фонди (станок-соат)
	1		2		
	Технологик усуллар				
	1	2	1	2	
Токарлик	3	2	3	0	20
Фрезерлик	2	2	1	2	37
Пайвандловчи	0	1	1	4	30
Фойда, (ш.б.)	11	6	9	6	

7. Корхона омборида узунлиги 8,1 метр бўлган темир қуймалар мавжуд. Бу қуймалардан анча кичик бўлган 100 та қуйма маҳсулотлар комплектини тайёрлаш зарур бўлсин. Ҳар бир комплект таркибига 2 та 3 метрли, 1 та 2 метрли ва 1 та 1,5 метрли қуйма маҳсулотлар кирази. Берилган материаллардан шундай фойдаланиш керакки, қуйма маҳсулотлар комплекти талаб қилинган миқдорда минимал чиқим билан тайёрлансин. Турли хил усуллардаги ишлов натижасида бир қуймадан олинадиган хомаки маҳсулотлар сони, ҳамда чиқиндилар миқдори жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар ўлчами (м)	Кесил усуллари								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	2	1	1	-	-	-	-	-
2	1	-	2	1	4	3	2	1	-
1,5	-	1	-	2	-	1	2	4	5
Чиқиндилар (м)	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

8. Хўжалик қарам, картошка ва кўп йиллик ўтлар экишга мослашган. Бунинг учун хўжалик ихтиёрида 850 га ҳайдаладиган ер майдони, 1500 тонна органик ўғитлар, 50000 киши-кунлар меҳнат ресурслари мавжуд. Маҳсулотлар бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ер, органик ўғит ва меҳнат ресурслари харажати қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хўжалик қарам, картошка ва кўп йиллик ўтлардан қанча ишлаб чиқарганда пул ифодасидаги ялпи маҳсулот миқдори максимал бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Кўрсаткичлар	Экин тури		
	Карам	Картошка	Кўп йиллик ўт
Меҳнат сарфи, (киши-кун)	50	30	10
Органик ўғитлар сарфи,(т)	20	15	10
Ялпи маҳсулот чиқими,(сўм)	1000	800	200

9. Қуйидаги жадвалда берилган маълумотларга кўра ҳайвонлар овқатланишининг оптимал суткали рационини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Овқатбop маҳсулотлар (ш.б.)	Бир бирлик хашак турдаги овқатбop маҳсулотлар таркиби		Истеъмолнинг минимал суткалик нормаси (ш.б.)
Хашак	1	0,5	5
Ҳазм қилинадиган протеин	80	200	560
Калций	1	8	20
Бир бирлик хашакнинг нархи,(сўм)	3	5	

10. Рацион  $P_1$  ва  $P_2$  маҳсулотлардан иборат. Уларнинг ҳар бирига А, В ва С витаминлар киради. Бир суткалик минимал истеъмол А витамин учун 100 бирлик, В дан 80 бирлик, С дан эса 160 бирликни ташкил қилади. Бир бирлик  $P_2$  маҳсулотнинг баҳоси 0,3 сўм,  $P_1$  ники эса 0,2 сўм. Қуйидаги жадвалда ҳар бир турдаги маҳсулот таркибидаги витаминлар миқдори келтирилган. Энг арзон тушадиган рацион вариантини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Витаминлар	Бир бирлик маҳсулот таркибидаги витаминлар миқдори	
	$P_1$	$P_2$
А	0,1	0,5
В	0,25	0,1
С	0,2	0,4

11. Савдо ташкилоти 3 турдаги товарларни сотиш учун қуйидаги ресурслардан фойдаланмоқда: вақт ва сотув муассасаларининг майдони.

Ҳар бир турдаги маҳсулотнинг бир партиясини сотиш учун ресурслар харажати жадвалда берилган. 1- маҳсулот турининг 1- партиясини айирбошлашдан тушган даромад 5 минг сўм, 2- сидан 8 минг сўм ва 3- сидан 6 минг сўм. Савдо ташкилотига максимал фойдани таъминловчи энг оптимал товар айирбошлаш режасини топишнинг математик моделини тузинг.

Ресурслар	Товарлар турлари			Ресурслар хажми
	1	2	3	
Вақт	0,5	0,7	0,6	970
Майдон,(м <sup>2</sup> )	0,1	0,3	0,2	90

12. Аҳолининг талабини ҳисобга олган ҳолда пойафзал дўкони режа даврида чарм пойафзаллардан камида 140000 (ш.б.) ва бошқа пойафзаллардан камида 40000 (ш.б.) сотиши керак. Айирбошлашдан тушадиган даромад ва харажатларни билган ҳолда, дўкон товаробороти камида 200000 (ш.б.) ва унинг даромади 2500 дан кам бўлмаслик шартида харажатларни минималлаштирувчи сотув режасини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Кўрсаткич (фоиз)	Пойафзал	
	Чарм пойафзал	Бошқа пойафзаллар
Даромад	1	2
Харажатлар	6	5

13. Уч хил  $P_1$ ,  $P_2$  ва  $P_3$  маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун

тўрт хил  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  ва  $S_4$  хом ашёлар ишлатилади. Хом ашёлар захираси, ҳар бир маҳсулотга кетган хом ашё харажатларининг технологик нормалари ва маҳсулотнинг бирлигининг баҳоси жадвалда келтирилган. Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг пул ифодасини максималлаштирувчи ишлаб чиқиш режасини аниқлаш масаласининг математик моделини тузинг.

Хом ашё турлари	Хом ашё захираси (кг)	Битта маҳсулотга кетган хом ашёлар нормаси (кг)		
		$P_1$	$P_2$	$P_3$
$S_1$	150000	4	2	1
$S_2$	170000	6	0	2
$S_3$	100000	0	2	4
$S_4$	200000	8	7	0
Битта маҳсулотнинг баҳоси (сўм)		100	150	200

14. 30-40 кг оғирликдаги чорва молларини озуклантириб, ўртача 300-400 кг оғирликни таъминлаш учун кунлик рацион таркибида қуйидаги миқдорда озуклантирувчи моддалар бўлиши керак: ем-хашак бирлиги – 1,6 дан кам эмас, ҳазм қилинадиган протеин – 200 г дан кам эмас, каротин – 10 мг дан кам эмас. Озуклантиришда арпадан, дуккакли маҳсулотлардан ва сомонли ундан фойдаланилади. 1 кг емдаги озуқа моддаларининг таркиби ва 1 кг емнинг баҳоси жадвалда кўрсатилган.

Кунлик рационнинг оптимал режасини тузинг.

Озуқлантирувчи модданинг номи	1 кг ем таркибидаги озуқа моддаларининг миқдори		
	арпа	дуккакли	сомонли ун
Ем бирлиги (шартли)	1,2	1,4	0,8
Ҳазм қилина-диган протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
1 кг емнинг баҳоси,(ш.б.)	3	4	5

15. Юзаси мос равишда 0,8 ва 0,6 млн.га тенг бўлган иккита тупроқ зонаси бор. Зоналар бўйича экинларнинг ҳосилдорлиги ва 1 ц доннинг баҳоси жадвалда келтирилган. Кузги экинларни 20 млн.ц. дан кам бўлмаган ва баҳорги экинларни 6 млн.ц. дан кам бўлмаган

миқдорда ишлаб чиқариш талаб қилинади. Кузги ва баҳорги донли экинлар майдони қандай бўлганда пул ифодасидаги ишлаб чиқарилган жами маҳсулотлар миқдори максимал бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар тури	ҳосилдорлик, ц/га		1 ц. маҳсулот баҳоси,\$
	1-зона	2-зона	
Кузги экинлар	20	25	8
Баҳорги экинлар	25	20	7

16. Жадвалда берилган маълумотларга асосланиб режадан ортиқ мебель ишлаб чиқариш режасини шундай тузингки, бунда меҳнат резервларидан тўлиқ фойдаланган ҳолда ишлаб чиқарилган жами маҳсулотнинг пул қиймати максималлаштирилсин. Масаланинг математик моделини тузинг.

Ишлаб чиқариш фактори	Фанер, м <sup>3</sup>	Тахта, м <sup>3</sup>	Меҳнат, киши/смена	Нархи (минг сўм)
Сарфлаш нормалари:				
1 сервантга	0,2	0,1	2	150
1 шифонерга	0,1	0,2	1	120
И/ч факторлари захираси	60	40	500	

17. Хўжаликда чорвачиликни ривожлантириш учун 324 минг сўм ажратилган. Шундан 180 минг сўми иш ҳақиға, 144 минг сўми моддий харажатлар (техник хизмат кўрсатиш) га тақсимланган. Жадвалда 1 ц. сут ва гўшт учун сарфланадиган харажатлар, шунингдек, сотув нархлари кўрсатилган. Хўжалик камида 6000 ц. сут ва 1000 ц. гўшт ишлаб чиқариши керак. Чорвачилик маҳсулотларини ишлаб чиқариш режасини шундай тузингки, унда хўжаликнинг чорвачиликдан оладиган даромади максимал бўлсин. Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар	Меҳнат сарфи, сўм	моддий харажатлар	Сотув нархи, сўм
Сут	12	8	25
Гўшт	90	80	200

18. Қоғоз комбинати хилма-хил турдаги қоғозларни ишлаб чиқариш режасини бажарди. Шунингдек, хом ашёдан иқтисод қилиб

қолди. 50 т целлюлоза, 80 т ёғоч массаси ва 2 т каолин фойдаланилмай қолди. Жадвалда ҳар хил турдаги қоғоздан 1 т ишлаб чиқариш учун кетадиган целлюлоза, ёғоч массаси, каолин нормаси берилган. 1 т босмаҳона қоғозидан 5 бирлик, 1 муқова қоғозидан 6 бирлик, 1 т ёзув қоғозидан 8 бирлик фойда кўрилади. Иқтисод қилинган маҳсулотдан қанча миқдорда ва қандай қоғоз турини ишлаб чиқарилса, корхона фойдаси кўпроқ бўлади? Бунда хом ашёнинг қайси тури ва қанча миқдори ортиб қолади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар	Хом ашёлар		
	Целлюлоза	Ёғоч массаси	Каолин
Босмаҳона қоғози	206	829	20
Муқова қоғози	424	627	10
Ёзув қоғози	510	518	12

19. Майший хизмат уйидаги дурадгорлик устахонасида савдо тармоқлари учун стол ва тумбочкалар ишлаб чиқариш йўлга қўйилган. Уларни тайёрлаш учун икки турдаги 72 м<sup>3</sup> ва 56 м<sup>3</sup> ёғоч бор. Жадвалда бир дона маҳсулот учун кетадиган ёғоч миқдори кўрсатилган. Битта столни ишлаб чиқаришдан устахона 4,4 бирлик соф фойда олади, битта тумбочкадан 2,8 бирлик фойда олади. Устахона ўзида бор материалдан қанча стол ва тумбочка ишлаб чиқарса, кўпроқ фойда олиш масаласининг математик моделини тузинг.

Маҳсулот	Хом ашёлар	
	1 - турдаги ёғоч	2 - турдаги ёғоч
Стол	0,18	0,08
Тумбочка	0,09	0,28

20. Авиакомпания икки турдаги самолётда маълум бир йўналишларда пассажирларни ташишни амалга оширади. Биринчи тур самолёт экипажи 3 кишидан иборат бўлиб, бир рейсда 45 та пассажирни ташийди, иккинчи тур самолёт экипажи 6 кишидан иборат бўлиб, бир рейсда 80 та пассажирни ташийди. Биринчи тур самолётни эксплуатация қилиш 600 (ш.п.б.) , иккинчи тур самолётни эксплуатация қилиш 900 (ш.п.б.) бўлади.

Режадаги давр ичида ушбу йўналишда 5000 та пассажир ташиш кераклиги маълум. Агар ҳар бир рейсда 360 кишидан ортиқ бўлмаган кишини ташиш мумкин бўлса, у ҳолда иккала турдаги самолётлардаги рейслар миқдори қанча бўлганда самолётларни

эксплуатация қилиш харажатлари минимал миқдорда бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

21. Цехнинг бир участкаси икки турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Бир кунлик режа бўйича биринчи турдаги маҳсулотдан (№ 1) 60 дона, иккинчи турдаги маҳсулотдан (№ 2) 80 та ишлаб чиқарилиши керак. Бир кунлик ресурслар эса қуйидагича: ишлаб чиқариш ускуналари 600 станок-соат, хом ашё 300 т, 420 киши-соат меҳнат ресурси ва 450 кВт/соат электроэнергия. Бир дона маҳсулотга сарф қилинадиган ресурслар миқдори қуйидаги жадвалда берилган. Биринчи маҳсулотнинг нархи 50 сўм, иккинчи турдаги маҳсулотнинг

нархи 60 сўм. Ишлаб чиқариладиган маҳсулотлардан максимал фойда кўриш учун ҳар бир маҳсулотдан қанчадан ишлаб чиқариш керак? Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар	и/ч ускунаси (ст/с)	Хом ашё (т)	Меҳнат (киши/соат)	Электрэнергия (кВт/с)
№ 1	4	2	2	3
№ 2	3	1	3	2

22. Чорва молларини яхшироқ боқиш учун кундалик рационда А витаминдан 6 бирлик, В витаминдан 12 бирлик, С витаминдан 4 бирлик бўлиши керак. Молларни боқиш учун икки турдаги емдан фойдаланилади. Жадвалда ем таркибидаги фойдали озуқа моддалари улуши, озуқа моддаларига бўлган кундалик эҳтиёж ва емлар бирлигининг нархи берилган. Чорвани боқиш учун энг арзон бўлган кундалик рационни аниқланг, масаланинг математик моделини тузинг.

Озуқа моддалари	1 кг емдаги озуқа моддалари миқдори		Молларнинг озуқа моддаларига бўлган кундалик эҳтиёжи
	I	II	
А	2	1	6
В	2	4	12
С	0	4	4
1 кг емнинг нархи,(сўм)	50	60	

23. Бензиннинг 2 туридан А ва В аралашмаси ҳосил бўлади. А аралашмаси 60 % 1- навли бензиндан, 40 % 2- нав бензиндан ташкил топади. В аралашмаси 80 % 1- нав бензиндан, 20 % 2- нав

бензиндан ташкил топади. 1 кг А аралашмасининг нархи 10 бирлик, 1 кг В аралашмасининг нархи 12 бирлик: 1-нав бензиндан 50 т, 2- нав бензиндан 30 т мавжуд бўлган ҳолда энг қиммат нархли аралашма ҳосил қилиш масаласининг математик моделини тузинг.

24. Тошқўмирнинг 3 та пунктдан 4 та пунктга ташиш режасини шундай тузингки, унда жами транспорт харажатлари минималлаштирилсин. Шахталарнинг бир суткалик ишлаб чиқариш ҳажми, истеъмол пунктларининг кўмирга бўлган талаби ва 1 тонна кўмирни ташиш харажатлари жадвалда келтирилган.

Шахталар	1 т кўмирни истеъмолчига ташиш харажатлари, (сўм)				Шахталарнинг ишлаб чиқариш ҳажми, (минг т)
	В <sub>1</sub>	В <sub>2</sub>	В <sub>3</sub>	В <sub>4</sub>	
А <sub>1</sub>	6	7	3	5	100
А <sub>2</sub>	1	2	5	6	150
А <sub>3</sub>	3	10	20	4	50
Буюртмачи-лар талаби, (минг т)	75	80	60	85	300

Масаланинг математик моделини тузинг.

25. Тўртта А<sub>1</sub>, А<sub>2</sub>, А<sub>3</sub>, А<sub>4</sub> омборхоналарда мос равишда 40, 50, 60, 30 тонна ёқилғи бор. Бу ёқилғиларни талаблари мос равишда 60, 80, 40 тонна бўлган 3 та В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>, В<sub>3</sub> истеъмолчиларга шундай ташиш керакки, сарф қилинган умумий транспорт харажатлари минимал бўлсин. (1 тонна ёқилғини ташиш харажатлари жадвалда келтирилган).

Омборлар	1 т ёқилғини истеъмолчиларга ташиш нархи (ш.б.)			ёқилғи заҳиралари (т)
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	4	3	5	40
$A_2$	6	2	1	50
$A_3$	7	4	2	60
$A_4$	5	6	3	30
ёқилғига талаб (т)	60	80	40	180

Масаланинг математик моделини тузинг.



## 2- машғулот

### Чизиқли программалаш масаласининг умумий қўйилиши ва унинг турли формаларда ифодаланиши. Чизиқли программалаш масаласининг каноник кўриниши.

1- масала. Қуйидаги ЧПМни каноник кўринишга келтиринг, ҳамда уни вектор ва матрица формасида ифодаланг.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Ечиш. Дастлаб чизиқли функцияни максималлаштиришдан минималлаштириш масаласига ўтамиз. Бунинг учун мақсад функцияни (-1) га кўпайтириш кифоядир. Сўнгра тенгсизликлар шаклида берилган чегаравий шартлардан тенгламаларга ўтамиз.

Натижада қуйидаги каноник кўринишдаги ЧПМни ҳосил қиламиз.

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

Ушбу масала вектор формада қуйидагича ифодаланади:

$$F = C \cdot X \rightarrow \min,$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 + P_7x_7 = P_0,$$

$$X \geq 0.$$

Бунда  $C = (-1; 2; -1; 1; 0; 0; 0)$ ,  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ - вектор

катор,  $CX$ - скаляр кўпайтма, ҳамда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

-шарт векторлари.

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Масаланинг матрица формасидаги ифодаланиши эса қуйидагича:

$$F = C \cdot X \rightarrow \min$$

$$A \cdot X = B_0$$

$$X \geq 0$$

Бунда  $C = (-1; 2; -1; 1; 0; 0; 0)$ ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

шарт матрицаси.

Масаладаги номанфий  $x_5, x_6, x_7$  ўзгарувчилар қўшимча ўзгарувчилар деб аталади ва уларнинг мақсад функциясидаги коэффициентлари 0 га тенг деб ҳисобланади.

Конкрет иқтисодий-математик моделларда иштирок этувчи қўшимча ўзгарувчиларнинг ҳар бири тайин иқтисодий маънога эга бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

### Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги берилган масалаларнинг ҳар бирини каноник кўринишга келтиринг, ҳамда уни вектор ва матрица формаларида ифодаланг.

1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$F = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 18 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$F = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

3.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 8x_4 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$F = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 \rightarrow \min$$

4.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

5.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18 \\ x_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$F = -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

6. 1- машғулотнинг математик моделларидан фойдаланиб, уларнинг ҳар бирини каноник кўринишга келтиринг ва қўшимча ўзгарувчиларнинг иқтисодий маъносини баён қилинг.

### 3- машғулот

#### Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқини. Чизиқли программалаш масаласини график усулда ечиш.

Чизиқли программалаш масаласини график усулда ечиш, асосан номаълумлари сони иккита бўлган ва чегаравий шартлари чизиқли тенгсизликлар шаклида берилган масалаларга қўлланилади.

1-масала.

Фирма икки хил А ва В маҳсулотларни ишлаб чиқаради. Ҳар бир маҳсулотга I, II ва III турдаги машиналарнинг ҳар бирида ишлов берилади. Маҳсулотларга машиналарда ишлов бериш соатлари куйидагича берилган:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

I, II, III машиналарнинг ҳафталик ишлаш вақтлари мос равишда 40, 36 ва 36 соатни ташкил этади. Сотишган А ва В маҳсулотлардан мос равишда 5 ва 3 бирлик фойда олинади.

Фирмага максимал фойда келтирадиган ҳафталик ишлаб чиқариш режасини тузиш талаб қилинади. Масалани ЧПМ шаклида таърифланг ва уни ечинг.

Ечилиши:

Ҳафта давомида ишлаб чиқариш режалаштирилган А маҳсулот миқдори  $x_1$  ва В маҳсулот миқдори  $x_2$  бўлсин.

У ҳолда, масаланинг берилганларидан фойдаланиб, куйидаги ЧПМни ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 40 \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 \leq 36 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 36 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (2)$$

$$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (3)$$

Бу масалада номаълумлар сони иккита, ҳамда чегаравий шартлар тенгсизликлар шаклида бўлганлиги учун график усулни қўллаш мумкин.

Масаладаги (1) ва (2) чегаравий шартлардаги ҳар бир тенгсизлик  $X_1OX_2$  координата текислигида чегаралари мос

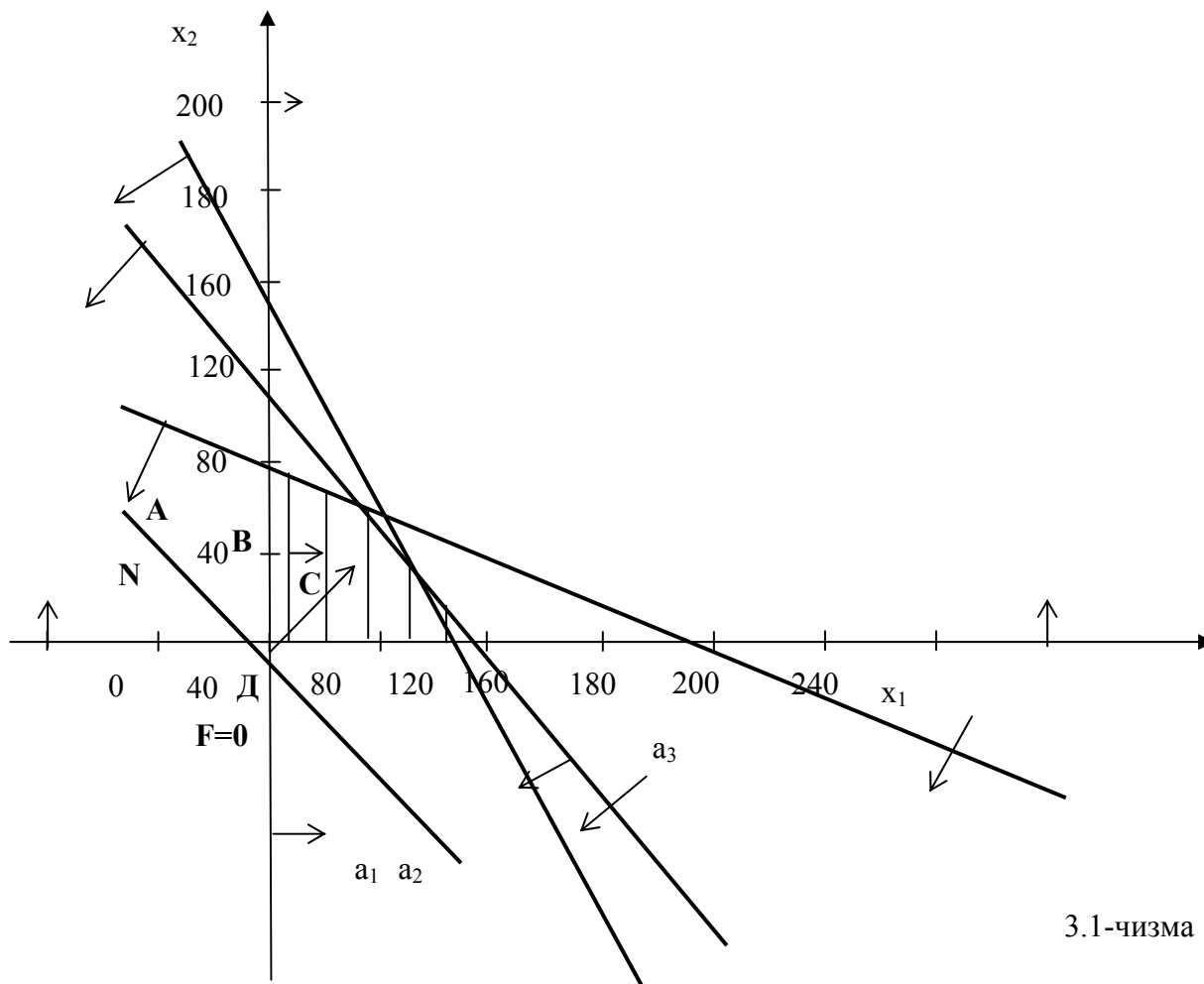
$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36 & (a_2) \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 = 36 & (a_3) \end{cases}$$

тўғри чизиқлардан ва координата ўқларидан иборат ярим текисликларни ифодалайди.

Ушбу ярим текисликларни ва уларнинг кесишмасидан иборат бўлган режалар кўпбурчагини чизиб оламиз, ҳамда  $\vec{N} = (5;3)$  йўналтирувчи вектор ёрдамида

$$F = 5x_1 + 3x_2$$

мақсад функциясига максимал қиймат берувчи нуқтани аниқлаймиз.



3.1-чизма

Чизмадан кўриниб турибдики,  $F=5x_1+3x_2$  мақсад функцияси ўзининг максимал қийматига ABCDO – режалар кўпбурчагининг C нуқтасида эришади. Бу нуқта  $a_1$  ва  $a_2$  тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлганлиги учун унинг координатасини

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36 & (a_2) \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб топамиз. Системанинг ечими  $x_1=60$  ва  $x_2=40$ . Бу ечимга мақсад функциясининг  $F_{\max}=5 \cdot 60 + 3 \cdot 40= 420$  қиймати мос келади.

Шундай қилиб, фирма 420 бирлик фойдага эришиш учун A маҳсулотдан 60 та ва B маҳсулотдан 40 та ишлаб чиқаришни режалаштириши керак бўлади. Бунда I ва II тур машиналарнинг иш вақти фондидан тўлалигича фойдаланилади., ҳамда III тур машина вақтидан ( $0,2x_1+0,4x_2 \leq 36$  тенгсизликка кўра) 8 соат ортиб қолади.

2- масала. Қуйидаги ЧПМни ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8 \end{cases} \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (5)$$

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \rightarrow \max \quad (6)$$

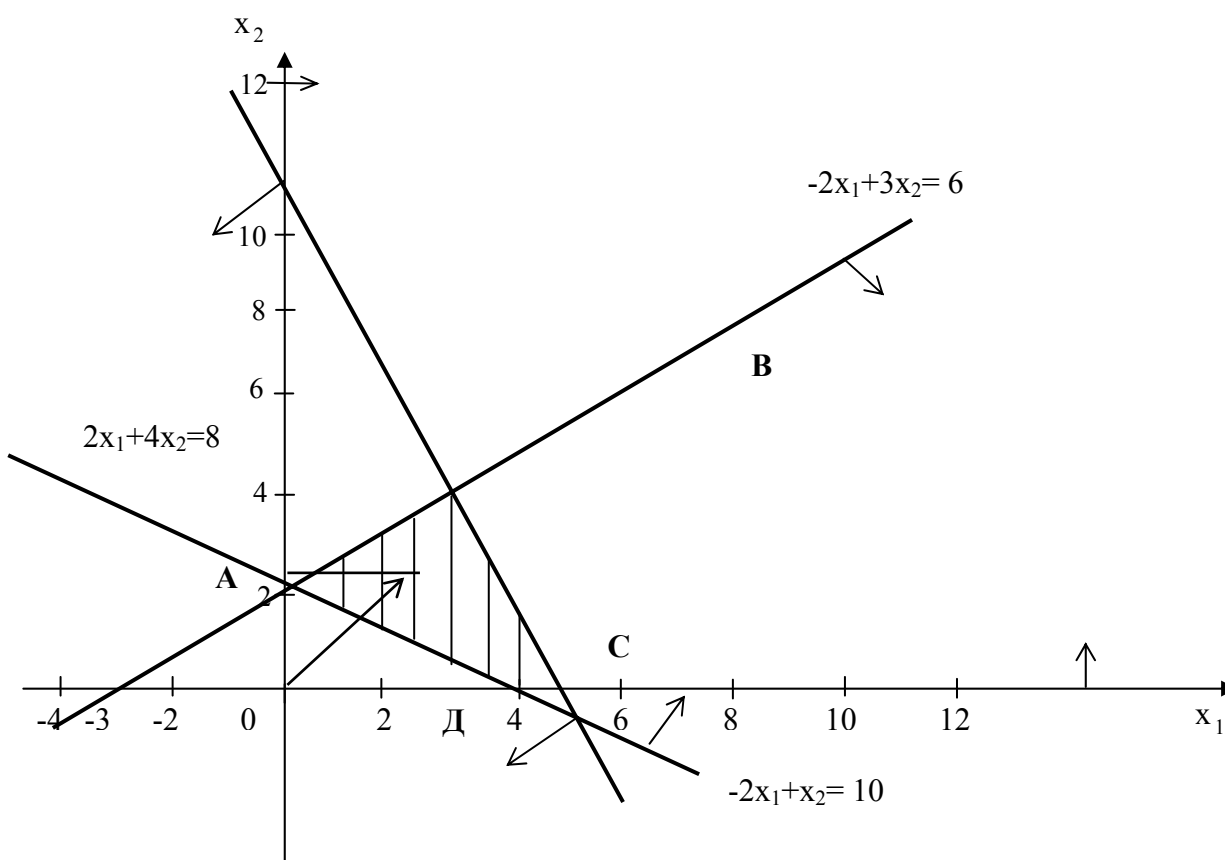
Ечилиши. Ушбу масаладаги тенгламалар системасидан номанфий  $x_3, x_4, x_5$  номаълумларнинг ҳар бирини  $x_1$  ва  $x_2$  номаълумотлар орқали ифодалаб, уларни мақсад функциясига қўйсақ, икки номаълумли, чегаравий шартлари чизиқли тенгсизликлардан иборат бўлган ЧПМ ҳосил бўлади.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Бу масаланинг режалар кўпбурчагини ясаб оламиз:



3.2-чизма

Чизмадан режалар кўпбурчагининг  $B$  нуктаси оптимал ечим эканлиги равшандир. Бу нуктанинг координатасини

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечими сифатида топамиз. Системани ечиб  $x_1=3$  ва  $x_2=4$  қийматларни оламиз. Бу қийматларни дастлабки берилган (4) системага қўйиб  $x_3=0$  ва  $x_4=0$  ва  $x_5=14$  қийматларни ва уларга мос келувчи мақсад функциясининг  $F_{\max}=18$  қийматини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган (4), (5) ва (6) масаланинг ечими  $X_{opt}=(3;4;0;0;14)$  ва  $F_{\max}=18$  дан иборат эканлигини аниқлаймиз.

Умуман, чегаравий шартлари  $n$  та номаълум ва  $m$  та чизиқли эркин тенгламаларни ўз ичига олган масалаларни ҳам, агар  $n-m=2$  муносабат бажарилса, график усул ёрдамида ечиш мумкин. Бунга оид қуйидаги масалани келтирамиз.

3-масала. Чизиқли прогрммалаш масаласини график усул ёрдамида ечинг.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases} \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (8)$$

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \rightarrow \max \quad (9)$$

Ечилиши: Бу масалада  $n=5$  ва  $m=3$  бўлиб,  $n-m=2$  бўлганлиги учун график усулни қўллаш мумкин. Дастлаб, Жордан-Гаусс усули ёрдамида (7) системанинг ҳар бир тенгламасида биттадан базис ўзгарувчиларни (масалан  $x_1, x_2, x_3$ -ўзгарувчиларни) ажратамиз. Натижада (7) системага тенг кучли бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \quad (10)$$

Бундан эса, базис ўзгарувчиларга нисбатан ечилган системани ҳосил қиламиз.

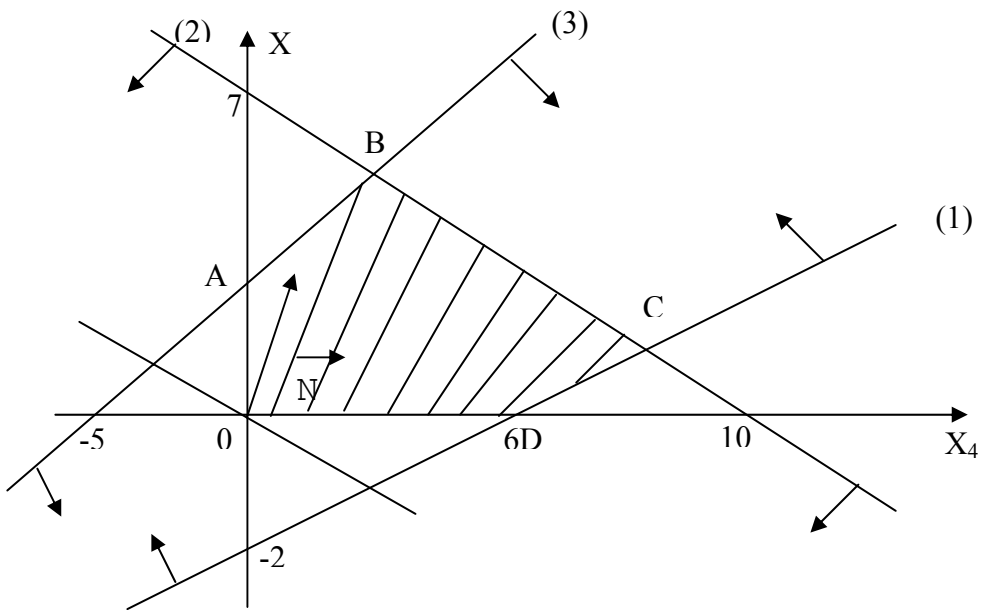
$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{cases} \quad (11)$$

Базис ўзгарувчиларнинг бу қийматларини мақсад функциясига қўйиб, ҳамда (10) системада базис ўзгарувчиларни танлаб юбориб, икки номаълумли қуйидаги чизиқли прогрммалаш масаласини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 6x_4 + 15x_5 - 38 \rightarrow \max$$

$x_4$  ва  $x_5$  координата текислигида режалар кўпбурчагини, мақсад функциясини ва йўналтирувчи векторни тасвирлаймиз.



3.3- чизма.



Чизмага асосан мақсад функцияни ўзининг максимал қийматига режалар кўпбурчагининг В нуқтасида эришишини кўрамиз.

Бу нуқта координаталарини

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

системани ечиб топамиз:  $x_4 = 2$ ;  $x_5 = \frac{28}{5}$ .  $F_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58$

Дастлабки берилган (7), (8), (9) масаланинг ечимини ҳосил қилиш учун  $x_4 = 2$  ва  $x_5 = \frac{28}{5}$

қийматларни (11) системага кўямиз.

Натижада  $x_1 = \frac{104}{5}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  қийматларни оламиз. Шундай қилиб,

$X_{opt} = (\frac{104}{5}; 0; 0; 2; \frac{28}{5})$  ва  $F_{\max} = 58$ .

### Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги масалаларни график усулида ечинг.

1. Мебел фабрикаси шкаф ва столлар ишлаб чиқариш учун зарур ресурслардан фойдаланади. Ҳар бир турдаги маҳсулотга сарфланадиган ресурслар нормаси, 1 та маҳсулотни сотишдан келадиган даромад ва бор бўлган ресурсларнинг умумий миқдори қуйидаги жадвалда берилган.

Ресурслар	1 та маҳсулотга сарфланадиган ресурслар миқдори		Ресурсларнинг умумий миқдори
ёғоч (м)			
1 хил учун	0,2	0,1	40
2 хил учун	0,1	0,3	60
Меҳнат сарфи (киши-соат)	1,2	1,5	371,4
1 та маҳсулотни сотишдан келадиган даромад	6	8	

Фабрика қанча стол ва шкаф ишлаб чиқарса, уларни сотишдан келган даромад максимал бўлади?

2. А ва В турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун токарлик, фрезерлик ва силлиқлаш жиҳозлари ишлатилади. Ҳар бир турдаги жиҳознинг ҳар бир турдаги маҳсулот ишлаб чиқаришга сарфлайдиган вақтлари нормалари жадвалда келтирилган. Ҳар бир турдаги жиҳознинг иш вақти умумий фонди ҳамда 1 та маҳсулотни сотишдан келадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган.

Жиҳоз тури	1 та маҳсулот тайёрлашга сарфланадиган вақт (соат)		Жиҳознинг фойдали иш вақти умумий фонди (с)
	А	В	
Фрезерлик	10	8	168
Токарлик	5	10	180
Силлиқлаш	6	12	144
1 та маҳсулот сотишдан келадиган даромад (сўм)	14	18	

А ва В маҳсулотлар ишлаб чиқаришнинг шундай режаси

топилсинки, улардан келадиган даромад максимал бўлсин.

3. Мебель фабрикасида стандарт фанер листлардан 3 турдаги хомашёдан мос равишда 24, 31 ва 18 дона қирқиши керак. Ҳар бир фанер листидан 2 усул билан хомашёлар қирқиш мумкин. Берилган усул бўйича қирқиш натижасида ҳосил бўладиган хомашёлар сони жадвалда берилган. Берилган усул бўйича 1 та фанер листни қирқишдан ҳосил бўлган чиқиндилар ўлчами ҳам куйидаги жадвалда келтирилган.

Хомашёлар тури	Усул бўйича қирқишдан ҳосил бўлган хомашёлар сони (дона)	
	1- усул	2- усул
1	2	6
2	5	4
3	2	3
қирқимлар (чиқиндилар) ўлчами(кв.см)	12	16

Қанча фанер листи ва қайси усулда қирқилганда минимал чиқинди ҳосил бўлади, ҳамда зарур хомашёлар сонидан кам бўлмаган хомашё олинади?

4. Фермасида қўнғир ва сариқ тулки парвариш қилинади. Уларнинг нормал парвариши учун 3 турдаги озуқа ишлатилади. Қўнғир ва сариқ тулкилар учун ҳар кунги зарур бўлган ҳар бир турдаги озуқалар миқдори жадвалда келтирилган. Ҳайвон фермаси ишлатиши мумкин бўлган ҳар бир турдаги озуқанинг умумий миқдори ва 1 та қўнғир тулки ва сариқ тулки терисини сотишдан келадиган даромад куйидаги жадвалда берилган.

Озуқа тури	Ҳар кунги зарур бўлган озуқа бирлиги миқдори		озуқанинг умумий миқдори
	қўнғир тулки	сариқ тулки	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 та терини сотишдан келадиган даромад (ш.б.)	16	12	

Ферма энг катта даромад олиши учун ишни қандай ташкил этиши керак?

5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

6.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

7.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

8.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$
$$F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

9.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$
$$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

10.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, (\min)$$

11.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$

12.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq 7 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 5x_1 - x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 3 \end{cases}$$
$$x_2 \geq 0$$
$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

13.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = 3x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, (\max)$$

14.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$
$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, (\min)$$

15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$F = 4 + 6x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, (\max)$$

16.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, (\min)$$

17.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$F = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \min, (\max)$$

18.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, (\min)$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \rightarrow \max .$$

$$20. \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \rightarrow \max .$$

#### 4- машғулот

### Чизиқли программалаш масаласининг таянч режалари. Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимларидан бирини топиш.

Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқинига кўра, масаланинг мумкин бўлган ечимлари тўплами қаварик кўпёқлидан иборат бўлади. Бу кўпёқлининг ҳар бир учига (четки нуқтасига) тайин бир таянч режа мос келади. Чизиқли программалаш масаласининг мақсад функцияси ўзининг оптимал қийматига шу таянч режалардан бирида эришади. Номанфий базис сони 2 та бўлган (ёки  $n-m=2$  шартни қаноатлантирувчи,  $n$ -номанфий базис сони,  $m$ -тенгламалар сони) ҳамда чегаравий шартлари тенгсизликлар шаклида берилган масалаларнинг таянч режаларини геометрик тасвирлаш мумкин.

1. Қуйидаги чизиқли программалаш масаласининг барча таянч режаларини топинг.

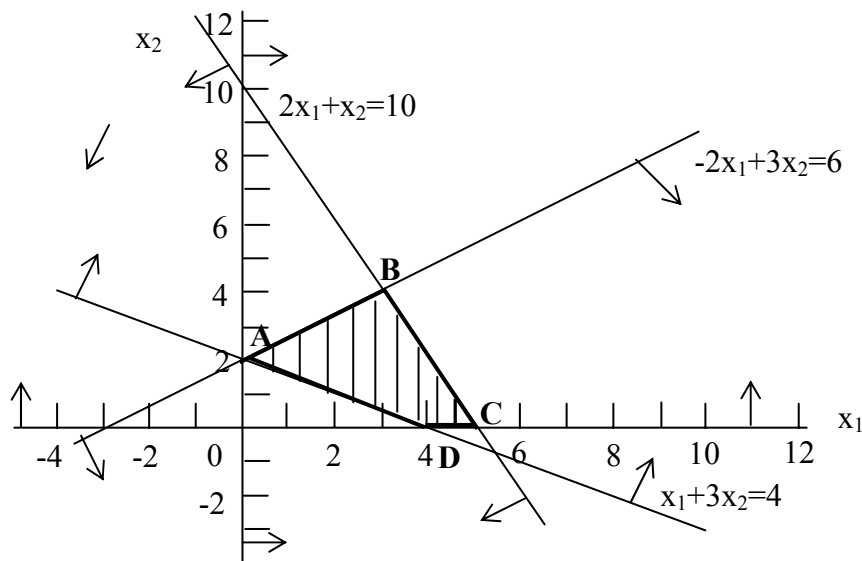
$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Ечиш. Чегаравий шартларга биноан ечимлар кўпбурчагини, мумкин бўлган тўпламларини чизиб оламиз.

$$2x_1 + x_2 = 10 \quad -2x_1 + 3x_2 = 6 \quad x_1 + 2x_2 = 4$$



Чизмадан кўришиб турибдики, ечимлар кўпбурчаги ABCD-

кўпбурчақдан иборат бўлиб, бу кўпбурчақнинг A, B, C ва D учларига берилган масаланинг  $X_A = (0; 2)$ ,  $X_B = (3; 4)$ ,  $X_C = (5; 0)$  ва  $X_D = (4; 0)$  таянч режалари мос келади. Бунда B нуқтанинг координаталари икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасининг координаталари, яъни

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечими сифатида топилганлигини эслатиб ўтамиз.

Шундай қилиб, берилган масаланинг барча таянч режалари тўртта бўлиб, улар  $X_1 = (0; 2)$ ,  $X_2 = (3; 4)$ ,  $X_3 = (5; 0)$  ва  $X_4 = (4; 0)$  ечимлардан иборатдир.

Чизиқли программалаш масаласини ечиш чизиқли тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг номанфий ечимларини топиш билан боғлиқдир. Системанинг номанфий базис ечимини (ёки ЧПМнинг таянч режасини) топишда қайси ўзгарувчини қайси тенгламадан базис ўзгарувчи сифатида ажратилиши фарқсиз эмас. Мана шу шартларни эътиборга олувчи усуллардан бирини қуйидаги мисолда кўриб чиқамиз.

2-масала.

Берилган тенгламалар системасининг номанфий базис ечимларидан бирини топинг.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Ечиш. Дастлаб системадаги барча тенгламаларни бир-бирига қўшиб, назорат тенглама (н.т.) деб аталувчи тенгламани ҳосил қиламиз. Бизнинг мисолда назорат тенглама  $-4x_1 + x_2 + 7x_4 - 5x_5 = 18$  тенгламадан иборатдир.

Назорат тенглама икки хил вазифани бажаради:

- 1) ажратилиши керак бўлган базис ўзгарувчи назорат тенгламадан танланади;
- 2) ҳар бир қадамдан кейин ҳосил бўлган назорат тенглама базис ўзгарувчиси бўлмаган тенгламалар йиғиндисига тенг эканлигига асосланиб, ҳисоблаш жараёни тўғри олиб борилаётганлигини текшириб бориш мумкин.

Назорат тенгламадан коэффициенти энг катта бўлган ўзгарувчи (масалан  $x_k$ ) танланади ва бу ўзгарувчи учун аниқловчи коэффициентлар ( $a_{ik}$ ) деб аталувчи

$$\frac{b_i}{a_{ik}} \text{ (бунда } b_i \geq 0, a_{ik} > 0 \text{)}$$

нисбатлар топилади. Аниқловчи коэффициентлардан энг кичигига

мос тенгламадан  $x_k$  ўзгарувчини ажратиб, уни элементар алмаштиришлар ёрдамида қолган тенгламалардан ва назорат тенгламадан ҳам йўқотамиз. Ушбу жараёни ҳар бир тенгламада биттадан базис ўзгарувчи ҳосил бўлгунча ёки назорат тенглама  $0=0$  кўринишга келгандан сўнг, жавобни ёзиш мумкин. Бунинг учун базис ўзгарувчиларни мос озод ҳадларга, базисмас ўзгарувчиларни эса нолга тенг деб олиш керак.

Энди юқорида айтилган амалларни берилган мисолга нисбатан қўллаймиз ва ҳисоблаш жараёнларини қулайлик учун қуйидагича жадвалда олиб борамиз.

i	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	а.к.	
1	-1	-1	0	2	-3	7	7/2	I қадам
2	-2	1	-1	5	-2	8	8/5*	
3	-1	1	1	0	0	3	-	
н.т	-4	1	0	7*	-5	18		
1	-1/5	-7/5	2/5	0	-11/5	19/5	19/2	II қадам
2	-2/5	1/5	-1/5	1	-2/5	8/5	-	
3	-1	1	1	0	0	3	3*	
н.т	-6/5	-2/5	7/5*	0	-11/5	34/5		
1	1/5	-9/5	0	0	-11/5	13/5	13*	III қадам
2	-3/5	2/5	0	1	-2/5	11/5	-	
3	-1	1	1	0	0	3	-	
н.т	1/5*	-9/5	0	0	-11/5	13/5		
1	1	-9	0	0	-11	13		IV қадам
2	0	-5	0	1	-7	10		
3	0	-8	1	0	-11	16		
н.т	0	0	0	0	0	0		

Жавоб:  $X = (13; 0; 16; 10; 0)$

Эслатма. (Номанфий базис ечимнинг мавжуд бўлмаслик шarti).

Агар бирор қадамда системада камида битта тенглама

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

кўринишга келиб, барча  $a_1, a_2, \dots, a_n$  коэффициентлар манфий ва  $b > 0$  бўлса, система номанфий ечимга эга бўлмайди.

Агар бирор тенглама

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$$

кўринишда бўлиб,  $b \neq 0$  бўлса, берилган система умуман ҳеч қандай ечимга эга бўлмайди.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

ЧПМнинг геометрик талкинидан фойдаланиб, қуйидаги масалаларнинг барча таянч ечимларини топинг.

1.

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.

$$F = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

3.

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$5. F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

4.

$$F = -3x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$6. F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 6x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Қуйидаги чизикли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимларидан бирини

ТОПИНГ

7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{J}: X = (3; 2; 0; 0; 0)$$

8.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\mathcal{J}: X = (9; 12; 0; 0)$$

9.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 6x_4 - 8x_5 = 18 \\ 2x_1 - x_2 - 15x_3 - 9x_4 - 12x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 20x_3 - 12x_4 - 16x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{J}: X = (3; 4; 0; 0; 0)$$

10.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{J}: X = (5; 0; 0; 3; 7)$$

11.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{J}$ : Номанфий ечим мавжуд эмас.



12.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{K} : \mathbf{X} = (5; 1; 0; 0; 0)$$

13.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 7x_6 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 6x_6 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 10 \end{cases}$$

$$\mathcal{K} : \mathbf{X} = (1; 1; 1; 1; 0; 0)$$

14.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3 \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{K} : \mathbf{X} = (4; 1; 1; 0; 0)$$

## 5- машғулот

### Чизиқли программалаш масаласини ечишнинг симплекс усули.

Симплекс усулни қуйидаги масалани ечиш жараёнида тавсифлаймиз:

1- масала. Қуйидаги ЧПМ ни симплекс усулда ечинг.

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Ечиш. Масаланинг тенгламалар системасини вектор формада ёзиб оламиз:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0,$$

бунда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$C = (-2; -1; 1; -1; 1).$$

Берилган  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  векторлар орасида учта бирлик  $P_3, P_4$  ва  $P_5$  векторлар бўлганлиги учун, масаланинг бошланғич таянч режасини бевосита ёзиш мумкин.

$$X_0 = (0; 0; 0; 5; 9; 7)$$

Бирлик векторларга мос  $x_3, x_4$  ва  $x_5$  - ўзгарувчилар базис ўзгарувчилар бўлиб, қолган  $x_1, x_2, x_3$  - ўзгарувчилар эса базисмас ўзгарувчилардир. Базис ўзгарувчиларга мос келувчи чизиқли функция коэффициентидан тузилган вектор  $C_{\text{баз}}(1; -1; 1)$  дан иборат.

Масалани қуйидаги симплекс жадвалга жойлаштирамиз. Жадвалнинг  $m+1$  қаторига режанинг баҳоси деб аталувчи ва

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} C_i - C_j$$

формула орқали аниқланувчи кўрсаткичлар жойлаштирилади. Агар барча  $\Delta_j \leq 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ) бўлса, топилган таянч режа оптимал ечим бўлади. Агар бирорта  $j=k$  учун  $\Delta_k > 0$  бўлса, у ҳолда топилган таянч ечим оптимал режа бўлмайди. Уни бошқа таянч режага алмаштириш керак. Таянч режаларни алмаштириш жараёни оптимал ечим топилгунча ёки унинг ечими йўқ эканлиги аниқлангунча такрорланади.

Симплекс усулни қўллаб, I қадамда  $\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j = 3$  га мос келувчи  $P_2$  базисга киритилиб,  $P_5$  вектор базисдан чиқарилади. II қадамда  $\Delta_3 = \frac{1}{2}$  га мос келувчи  $P_1$  вектор базисга киритилиб,  $P_3$  базисдан чиқарилади ва ниҳоят III қадамда оптимал ечим топилади.

i	Базис	C <sub>δ</sub>	P <sub>0</sub>	-2	-1	1	-1	1	A.K.
				P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	
1	P <sub>3</sub>	1	5	1	1	1	0	0	5
2	P <sub>4</sub>	-1	9	2	1	0	1	0	9
3	P <sub>5</sub>	1	7	1	2	0	0	1	7/2*
m+1	Δ <sub>j</sub> =	F <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	3	2	3*	0	0	0	
1	P <sub>3</sub>	1	3/2	1/2	0	1	0	-1/2	3*
2	P <sub>4</sub>	-1	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
3	P <sub>2</sub>	-1	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
m+1	Δ <sub>j</sub> =	F <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	-15/2	1/2*	0	0	0	-3/2	
1	P <sub>1</sub>	-2	3	1	0	2	0	-1	
2	P <sub>4</sub>	-1	1	0	0	-3	1	1	
3	P <sub>2</sub>	-1	2	0	1	-1	0	1	
m+1	Δ <sub>j</sub> =	F <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	-9	0	0	-1	0	-1	

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, берилган масаланинг оптимал режаси  $X^*=(3; 2; 0; 1; 0)$  бўлиб, унга чизилган функциянинг  $F_{\min}=-9$  қиймати мос келади. Топилган ечим ягонадир, чунки нолга тенг  $\Delta_j$  баҳолар фақат базис векторлар учун ўринлидир.

2. Қуйидаги ЧПМни симплекс усулида ечинг:

$$F = -x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

Берилган масалани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$F = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

Чегаравий шартларда кўшимча ўзгарувчилар киритиб тенгсизликлардан тенгликларга ўтамиз. (Кўшимча ўзгарувчиларнинг чизикли функциядаги коэффициентлари нолга мос келишини эслатиб ўтамиз).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

Системани вектор формада ёзиб оламиз:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 + x_5 P_5 + x_6 P_6 = P_0,$$

бунда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C = (1; -1; -3; 0; 0; 0), \quad C_{\text{баз}} = (0; 0; 0).$$

Бирлик векторларга мос  $x_4, x_5, x_6$  - ўзгарувчиларни мос озод ҳадларга тенглаб, базисмас  $x_1, x_2, x_3$  ўзгарувчиларни эса нолга тенг деб, бошланғич таянч режани ҳосил қиламиз.

$$X_0 = (0; 0; 0; 1; 2; 5)$$

Кейинги ҳисоблаш жараёнларини қуйидаги симплекс жадвалда бажарамиз:

i	Базис	C <sub>δ</sub>	P <sub>0</sub>	1	-1	-3	0	0	0	A.K.
				P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	
1	P <sub>4</sub> P <sub>5</sub> P <sub>6</sub>	0	1	2	-1	1	1	0	0	1*
2				-4	2	-1	0	1	0	-
3				3	0	1	0	0	1	5
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		0	-1	1	3*	0	0	0	
1	P <sub>3</sub> P <sub>5</sub> P <sub>6</sub>	-3	1	2	-1	1	1	0	0	-
2				-2	1	0	1	1	0	3*
3				1	1	0	-1	0	1	4
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-3	-7	4*	0	-3	0	0	
1	P <sub>3</sub> P <sub>2</sub> P <sub>6</sub>	-3	4	0	0	1	2	1	0	-
2				-2	1	0	1	1	0	-
3				3	0	0	-2	-1	1	1/3
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	1*	0	0	-7	-4	0	
1	P <sub>3</sub>	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	P <sub>2</sub>	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	
3	P <sub>1</sub>	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	

Тўртинчи кадамда (**m+1**) – сатрда  $\Delta_j = F_j - C_j \leq 0$  оптималлик шarti бажарилганлиги учун

$$X^* = (1/3; 11/3; 4; 0; 0; 0)$$

режа оптимал бўлиб, унга  $F_{\min} = -46/3$  қиймат мос келади. Дастлабки берилган масаланинг ечими эса

$$X_{\text{опт}} = (1/3; 11/3; 4), F_{\max} = 46/3.$$

бўлиб, ушбу ечим ягона эканлигини симплекс жадвалда кўриш мумкин, яъни нолга тенг  $\Delta_j = F_j - C_j$  баҳолар фақат базис векторлар учун ўринлидир.

Бошланғич таянч режаси берилмаган чизикли программалаш масалаларнинг чегаравий шартларидан иборат тенгламалар системасида элементар алмаштиришлар бажариб, бирор таянч ечимни (номанфий базис ечимни) топиб, сўнгра симплекс усул ёрдамида оптимал ечимни аниқлаш мумкин. Чегаравий шартларда озод ҳади манфий бўлган тенгламалар катнашса, бундай тенгламаларнинг чап ва ўнг томонини  $-1$ га кўпайтириб, озод ҳадни мусбат қилиб олиш керак.

Бунга оид куйидаги масалани қараймиз.

3-масала.

Дастлаб чизикли программалаш масаласининг бирор таянч режасини топинг ва симплекс усул ёрдамида оптимал ечимни аниқланг.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 7x_5 = -8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Системадаги иккинчи тенгламанинг озод ҳади манфий бўлганлиги учун, унинг иккала қисмини (-1) коэффициентга кўпайтириб, озод ҳадни мусбат қилиб оламиз.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

Бу системанинг номанфий базис ечимларидан бирини, (ёки чизиқли проградмалаш масаласининг таянч режаларидан бирини) масалан, 4-машғулота кўрилган усул ёрдамида топиб олайлик.

Ҳисоблаш жараёнларини қуйидаги жадвалда бажарамиз.

i	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	b <sub>0</sub>	а.к
1	1	2	-3	1	-5	5	5
2	2	3	-5	2	-7	8	4
3	3	1	-2	6	2	5	1*
Н.Т	6	6	-10	9*	-10	19	
1	1/2	11/6	-8/3	0	-16/3	4	24/11*
2	1	8/3	-13/3	0	-23/3	6	9/4
3	1/2	1/6	-1/3	1	1/3	1	6
Н.Т	3/2	9/2*	-7	0	-13	10	
1	3/11	1	-16/11	0	-32/11	24/11	8
2	3/11	0	-5/11	0	1/11	2/11	2/3*
3	5/11	0	-1/11	1	9/11	7/11	7/5
Н.Т	3/11	0	-5/11	0	1/11	2/11	
1	0	1	-1	0	-3	2	
2	1	0	-5/3	0	1/3	2/3	
3	0	0	2/3	1	2/3	1/3	
Н.Т	0	0	0	0	0	0	

Жадвалнинг охири босқичида дастлаб берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 3x_5 = 2 \\ x_1 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

системани ва бошланғич  $X_0 = (\frac{3}{2}; 2; 0; \frac{1}{3}; 0)$  таянч режани ҳосил қиламиз.

Бу таянч режани оптималликка текшириш учун симплекс жадвални тузамиз ва  $\Delta_j = F_j - C_j$  - баҳоларнинг қийматларини ҳисоблаймиз.

i	Базис	C <sub>5</sub>	P <sub>0</sub>	-3	-4	-1	-2	1	а.к
				P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	
1	P <sub>2</sub>	-4	2	0	1	-1	0	-3	-
2	P <sub>1</sub>	-3	2/3	1	0	-5/3	0	1/3	-
3	P <sub>4</sub>	-2	1/3	0	0	2/3	1	2/3	1/2
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-32/3	0	0	26/3*	0	26/3	
1	P <sub>2</sub>	-4	5/2	0	1	0	3/2	-2	
2	P <sub>1</sub>	-3	3/2	1	0	0	5/2	2	
3	P <sub>3</sub>	-1	1/2	0	0	1	3/2	1	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	0	0	0	-13	0	

Шундай қилиб, масаланинг оптимал плани

$X_{opt} = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0)$  бўлиб, унга  $F_{max}=15$  қиймат мос келади. Шунини таъкидлаш керакки, олинган  $X = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0)$  - оптимал план ягона эмас, чунки базисга кирмаган P<sub>5</sub> векторга 0 га тенг бўлган баҳо мос келади.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйида берилган чизикли программалаш масалаларини симплекс усулда ечинг.

1.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2$$

2.

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2$$

3.

$$F = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 15 \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

4.

$$F = 7x_1 + 9x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

5.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

6.

$$F = -5x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2$$

7.

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

8.

$$F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

9.

$$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

10.

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Қуйидаги масалаларда дастлаб ЧПМнинг бирор таянч режасини топинг ва симплекс усулини қўллаб оптимал ечимни аниқланг.

11.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

12.

$$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

13.

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$



14.

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

15.

$$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

16.

$$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

17.

$$F = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

18.

$$F = -x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 - x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

19.

$$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

20.

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

## 6- машғулот

### Сунъий базис усули. Симплекс усулининг қўлланилиши.

Маълумки, каноник шаклда берилган чизиқли программалаш масаласининг шартларидан иборат бўлган системанинг ҳар бир тенгламасида базис ўзгарувчилар қатнашса, у ҳолда масаланинг таянч режасини осонликча кўрсатиш мумкин. Лекин, таянч ечимларга эга бўлган кўпгина чизиқли программалаш масалаларининг шартларида базис ўзгарувчилар (ёки бирлик векторлар) қатнашмаган бўлади. Албатта, бундай ҳолларда элементар алмаштиришлар ёрдамида берилган системага тенг кучли бўлган ҳамда базис ўзгарувчилар қатнашган тенгламалар системасини ҳосил қилиш ва дастлабки таянч режани топиш мумкин.

Каноник кўринишда берилган чизиқли программалаш масалаларининг бошланғич таянч режани, сунъий базис усули деб аталувчи усул ёрдамида ҳам топиш мумкин ва топилган таянч режани симплекс жадвалга ёзиб, масалани симплекс усули ёрдамида ечиш мумкин бўлади.

Сунъий базис усулининг алгоритми қуйидагича:

Чизиқли программалаш масаласи шартларидаги базис ўзгарувчиси бўлмаган ҳар бир тенгламага сунъий равишда базис ўзгарувчилар қўшамиз ва бу ўзгарувчиларни мақсад функциясига (минимал қийматни топиш масаласи учун) етарлича катта бўлган мусбат  $M$  коэффициент билан киритамиз. Бундай ўзгарувчилар «сунъий базис ўзгарувчилар» деб аталади. Ҳосил бўлган масала эса берилган масалага нисбатан кенгайтирилган масала деб аталади. Масалани ечиш жараёнини симплекс жадвалда симплекс усул билан бажарамиз.

Юқорида айтилганларни қуйидаги мисолни ечиш жараёнида кўрсатамиз.

1- мисол.

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Ечилиши. Масаланинг шартларидаги тенгламаларда базис ўзгарувчилар йўқ. Ҳар бир тенгламага мос равишда  $x_5, x_6$  -

сунъий базис ўзгарувчиларни қўшамиз ва мақсад функцияни (-1) га кўпайтириб, қуйидаги кенгайтирилган масалани ҳосил қиламиз.

$$F = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}$$

Кенгайтирилган масала учун  $X = (0; 0; 0; 0; 3; 3)$  бошланғич таянч режа ҳисобланади. Кейинги ҳисоблашларни қуйидаги симплекс жадвалда бажарамиз.

i	Ба- зис	C <sub>б</sub>	P <sub>0</sub>	-5	-3	-4	+1	M	M	а.к
				P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	
1	P <sub>5</sub>	M	3	1	3	2	2	1	0	1*
2	P <sub>6</sub>	M	3	2	2	1	1	0	1	3/2
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		6M	3M+5	5M+3*	3M+4	3M-1	0	0	
1	P <sub>2</sub>	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3*
2	P <sub>6</sub>	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	3/4
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		M-3	4/3M+4*	0	-M/3+2	-M/3-3	-5/3M-1	0	
1	P <sub>2</sub>	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4	1*
2	P <sub>1</sub>	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4	—
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-6	0	0	3*	-2	-M+1	-M-3	
1	P <sub>3</sub>	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3	
2	P <sub>1</sub>	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3	
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-9	0	-4	0	-5	-M-1	-M-2	

Охирги кадамдан кўрамизки, масала ягона  $X=(1;0;1;0;0;0)$  оптимал ечимга ва  $F_{\min}=-9$  минимал қийматга эга. Дастлабки берилган масала ечими эса  $X_{\text{опт}}=(1;0;1;0)$ ;  $F_{\max}=9$ .

## Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги чизиқли программалаш масалаларини сунъий базис усулида ечинг.

1.

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (2, 8; 2, 4; 0, 4)$$

$$F_{\max} = 7, 2$$

2.

$$F = 16x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 = 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (10; 10)$$

$$F_{\min} = 260$$

3.

$$F = 4 - 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (0; 1; 1; 0, 0)$$

$$F_{\max} = 6$$

4.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 + \frac{7}{2}x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (0; 6; 0; 6)$$

$$F_{\max} = 27$$

5.

$$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (3; 1; 0; 0)$$

$$F_{\min} = 1$$

6.

$$F = -2x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (0; 125; 25; 0)$$

$$F_{\min} = 475$$

7.

$$F = 3x_1 + 6x_2 + 30x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (2; 3; 0)$$

$$F_{\min} = 24$$

8.

$$F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{K} : X_{\text{опт}} = (0; 0; 14)$$

$$F_{\max} = 42$$

9. 1- машғулотдаги масалаларни симплекс усулини қўллаб ечинг.

## 7- машғулот

### Чизиқли программалашда иккиланиш назарияси.

Иккиланган масалаларнинг жуфтлиги қуйидаги кўринишлардан бирида бўлиши мумкин..

Т/Р	Берилган масала.	Иккиланган масала.
Симметрик бўлмаган масалалар		
I	$F=CX \rightarrow \min$ $AX=B_0$ $X \geq 0$	$G=YB_0 \rightarrow \max$ $YA \leq C$
II	$F=CX \rightarrow \max$ $AX=B_0$ $X \geq 0$	$G=YB_0 \rightarrow \min$ $YA \geq C$
Симметрик масалалар		
III	$F=CX \rightarrow \min$ $AX \geq B_0$ $X \geq 0$	$G=YB_0 \rightarrow \max$ $YA \leq C$ $Y \geq 0$
IV	$F=CX \rightarrow \max$ $AX \leq B_0$ $X \geq 0$	$G=YB_0 \rightarrow \min$ $YA \geq C$ $Y \geq 0$

Демак, берилган масала учун иккиланган масала тузишдан аввал, берилган масаланинг шартлари системасини тегишли шаклга келтириб, кейин иккиланган масала тузилади.

1-масала. Ушбу

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

масала учун иккиланган масала тузилсин.

Ечиш: Қаралаётган масала симметрик бўлмаган масаланинг II шаклига доир. Иккиланган масалада ўзгарувчиларнинг сони берилган масала системасининг тенгламалари сонига тенг, яъни учга тенг. Иккиланган масала мақсад функциясининг коэффициентлари берилган масала тенгламалар системасининг озод ҳадига, яъни 12, 24 ва 18 сонларига тенг бўлади.

Берилган масала функциясининг максимумини топиш талаб қилинган бўлиб, шартлар системаси фақат тенгламалардан иборат. Шу сабабдан иккиланган масалада мақсад функциясининг минимуми топилади ва унинг ўзгарувчилари ихтиёрий қийматларни (жумладан, манфий қийматларни ҳам) қабул қилиши мумкин бўлади.

Берилган масаланинг ҳар учала ўзгарувчилари фақат номанфий қийматлар қабул қилганлиги сабабли иккиланган масала шартлар системаси “ $\geq$ ” кўринишдаги тенгсизликдан иборат бўлади. Бинобарин, берилган масала учун иккиланган масала куйидагича бўлади:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$
$$G = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \rightarrow \min$$

2-масала. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

масала учун иккиланган масала тузилсин.

Ечиш: Бу масала шу кўринишда жадвалдаги берилган масалаларнинг ҳеч бирига мос келмайди, лекин биринчи тенгсизликни (-1) га кўпайтириб, III шаклдаги симметрик масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

Бу масаланинг иккиланган масаласи қуйидаги масала бўлади:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$G = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \rightarrow \max$$

3-масала. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

масала учун иккиланган масала тузилсин.

Ечиш: Бу масала ҳам жадвалда берилган масалаларнинг ҳеч бирига мос келмайди. Қаралаётган масалани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:



$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

Бу IV шаклда берилган симметрик масалага мос келади. Шу сабабдан иккиланган масала куйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$G = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \rightarrow \min$$

Биринчи иккиланиш теоремаси. Агар иккиланган масалалардан бири оптимал ечимга эга бўлса, иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади ва

$$F_{\max}(X_{\text{опт}}) = G_{\min}(Y_{\text{опт}})$$

$$X_{\text{опт}} = D^{-1}B_0 \quad \text{ва} \quad Y = C_6 D^{-1}$$

Бунда  $D$  – симплекс усулдаги охирги базис векторлар компоненталаридан тузилган матрица;

$B_0$  - берилган масаланинг озод ҳадларидан тузилган вектор;

$C_6$  - охирги базис ўзгарувчиларнинг мақсад функциядаги коэффициентларидан тузилган вектор.

Агар масалалардан бирининг мақсад функцияси чегараланмаган бўлса, у ҳолда иккинчиси ечимга эга бўлмайди.

4-масала. Ушбу

$$F = x_2 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

$$-4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$$

$$3x_2 + x_5 + x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 6$$

Масала учун иккиланган масала тузилсин ва унинг ечими топилсин.

Ечиш. Иккиланган масаланинг кўриниши куйидагича бўлади.

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$G = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \max$$

Берилган масалани симплекс усулда ечамиз.

Б	C <sub>6</sub>	A <sub>0</sub>	0	1	0	-1	-3	0
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>
A <sub>1</sub>	0	1	1	2	0	-1	1	0
A <sub>3</sub>	0	2	0	-4	1	2	-1	0
A <sub>6</sub>	0	5	0	3	0	0	1	1
Δ <sub>J</sub>		0	0	-1	0	1	3	0
A <sub>5</sub>	-3	1	1	2	0	-1	1	0
A <sub>3</sub>	0	3	1	-2	1	1	0	0
A <sub>6</sub>	0	4	-1	1	0	1	0	1
Δ <sub>J</sub>		-3	-3	-7	0	4	0	0
A <sub>5</sub>	-3	4	2	2	1	0	1	0
A <sub>4</sub>	-1	3	1	-2	1	1	0	0
A <sub>6</sub>	0	1	-2	3	-1	0	0	1
Δ <sub>J</sub>		-15	-7	1	-4	0	0	0
A <sub>5</sub>	-3	4	2	0	1	0	1	0
A <sub>4</sub>	-1	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$
A <sub>2</sub>	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
Δ <sub>J</sub>		$-\frac{46}{3}$	$-\frac{19}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$

Берилган масалани оптимал ечими: X<sub>опт</sub>=(0; 1/3; 0; 11/3; 4; 0) бўлади. Айтиб ўтамизки,

$$D=(A_5, A_4, A_2)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ва } D^{-1}B_0=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Биринчи иккиланиш теоремаси асосида иккиланган масаланинг оптимал ечимини топамиз:

$$Y_{\text{опт}}=C_0 * D^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{19}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Яъни, иккиланган масаланинг оптимал ечими  $Y_{\text{опт}}$  нинг  $i$ -компонентасини топиш учун симплекс жадвалнинг охирги сатридаги бошланғич базис векторлари устунига мос келувчи сонларга қараш керак.

$$y_1 = -\frac{19}{3}; y_2 = -\frac{11}{3}; y_3 = -\frac{1}{3}$$

Эслатма: амалиётда иккиланган масалалар жуфтидан ҳисоблаш учун қулай бўлган масала танлаб олиниб, у учун симплекс усул қўлланади.

5-масала. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

масала берилган бўлсин.

Ечиш: Бу масалага иккиланган масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2 \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$G = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \rightarrow \max$$

Берилган масалани симплекс усулда ечиш учун 4 та қўшимча ва 1 та сунъий ўзгарувчи киритиш зарур бўлади. Бошланғич симплекс жадвал 6 сатр ва 9 устундан иборат бўлади.

Иккиланган масалани ечиш учун эса 3 та қўшимча ўзгарувчи керак бўлади. Унинг бошланғич симплекс жадвали 4 сатр ва 8 устундан иборат бўлади.

Бу ҳолда албатта иккиланган масалани ечиш мақсадга мувофиқдир. Ушбу масалани симплекс усул билан ечиб, қуйидаги жадвални тузамиз:

Б	C <sub>б</sub>	A <sub>0</sub>	2	3	6	3	0	0	0
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
A <sub>5</sub>	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
A <sub>6</sub>	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
A <sub>7</sub>	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
Δ <sub>J</sub>		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
A <sub>3</sub>	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
A <sub>6</sub>	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
A <sub>7</sub>	0	5	3	2	0	2	2	0	1
Δ <sub>J</sub>		6	10	-9	0	9	6	0	0
A <sub>3</sub>	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
A <sub>2</sub>	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
A <sub>7</sub>	0	4	3	0	0	3	3	-1	1
Δ <sub>J</sub>		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Иккиланган масаланинг оптимал ечими  $Y_{\text{опт}}=(0; 1/2; 3/2; 0)$ ,  $G_{\text{max}}=21/2$  бўлади.  
 Берилган масаланинг ечими эса  $X_{\text{опт}}=(3/2; 9/2; 0)$ ,  $F_{\text{min}}=21/2$ .

Мустақил ечиш учун мисоллар.

Қуйидаги масалалар учун иккиланган масалалар тузилсин ва уларнинг ечими топилсин.

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(2/3; 0; 0; 7/3); \quad G_{\text{min}}=13$$

$$F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$X_{\text{опт}}=(4; 1); \quad F_{\text{max}}=13$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(1/9; 13/9; 0); G_{\text{min}}=110/9$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \min$$

$$X_{\text{опт}}=(0; 10/3; 8/9); F_{\text{max}}=110/9$$

$$3. \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: Иккиланган масала ечимга эга эмас.}$$

$$F = x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(4; 2); G_{\text{min}}=20$$

$$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$X_{\text{опт}}=(2; 1; 0); F_{\text{max}}=20$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(12; 1); G_{\text{min}}=29$$

$$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \rightarrow \max$$

$$X_{\text{опт}}=(0; 0; 1; 1/2); F_{\text{max}}=29$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: Иккиланган масала ечимга эга эмас.}$$

$$F = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 36 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(7/9; 0; 13/9); G_{\text{min}}=66$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \rightarrow \max$$

$$X_{\text{опт}}=(18; 6; 0); F_{\text{max}}=66$$

Қуйидаги масалалар учун иккиланган масала тузилсин ва унинг ечими топилсин:

$$8. \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(0; 0; 7/5); G_{\text{max}}=21$$

$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \leq 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \leq 32 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(7/11; 1/11; 0); G_{\text{min}}=226/11$$

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$10. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ж: } Y_{\text{опт}}=(0; 1; 0); G_{\text{min}}=28$$

$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \rightarrow \max$$

## 8- машғулот

### Иқтисодий масалалар ечимини таҳлил қилиш.

ЧМПни оптимал ечимига корхонада вужудга келадиган реал жараёнлар жиддий таъсир қилади. Бундай иқтисодий жараёнларга қуйидагилар киради:

- 1) ресурслар захирасининг ўзгариши;
- 2) маҳсулот ишлаб чиқаришда янги технологик усулни қўллаш натижасида хом ашёлар сарфланишининг камайиши;
- 3) корхона нарх сиёсатида юз берадиган ўзгариш;
- 4) янги тур маҳсулот ишлаб чиқаришни режалаштириш ва ҳ.к.

Юқорида келтирилган жараёнларни оптимал ечимга бўлган таъсирини таҳлил қилишда иккиланган назариясининг иккинчи теоремасидан фойдаланилади.

Теорема. Агар берилган масаланинг  $i$ - чегараловчи шартлари унинг оптимал ечимига қатъий тенгсизликка айланса, у ҳолда иккиланган масаланинг оптимал ечимига  $i$ - компонента нолга тенг бўлади; агар иккиланган масаланинг оптимал ечимига  $i$ - компонента мусбат бўлса, у ҳолда берилган масаланинг  $i$ - шarti оптимал ечимда тенгликка айланади.

Бундан кўринадики: оптимал ечимнинг баҳоси - ресурслар танқислиги даражасининг ўлчовидир. Маҳсулот ишлаб чиқаришда тўла ишлатилмайдиган хом ашё «танқис (дефицит) хом ашё» дейилади. Бундай хом ашёни ошириб сарф қилиш корхонада маҳсулот ишлаб чиқариш даражасини оширади. Маҳсулот ишлаб чиқаришда тўла ишлатилмайдиган хом ашё «нотанқис (дефицит бўлмаган) хом ашё» ҳисобланади. Бундай хом ашёларни иккиланган баҳоси нолга тенг бўлади. Уларнинг миқдорини ошириш ишлаб чиқариш режасини оширишга таъсир қилмайди.

Шундай қилиб:

1) иккиланган баҳолар ресурсларнинг танқислик ўлчови бўлади. Иккиланган масала оптимал ечимининг  $y_i$  компонентаси  $i$  - ресурс захирасининг баҳоси бўлади;  $y_i$  қанча катта бўлса, ресурс танқислиги шунча юқори эканлиги кўрсатади. Нотанқис (ортиқча) ресурс учун  $y_i=0$  бўлади.

2) иккиланган баҳолар ресурслар захирасининг ўзгариши мақсад функцияга қандай таъсир қилишини кўрсатади:

$$\Delta F = y_i \cdot \Delta b_i$$

бунда:  $y_i - i$  - ресурснинг иккиланган баҳоси;

$\Delta b_i - i$  -ресурс захирасининг орттирмаси;

$\Delta F$  - мақсад функциясининг ўзгариши.

Масала. Корхона икки хил  $M_1$  ва  $M_2$  маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун икки тур А ва В хом ашёлардан фойдаланади. Бир бирлик  $M_1$  ва  $M_2$  хил маҳсулотга сарф қилинадиган турли хом ашёлар нормаси, маҳсулотнинг бир бирлигидан олинадиган даромад ҳамда хом ашёлар захираси қуйидаги жадвалда келтирилган:

Хом ашё тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган хом ашё нормаси		Хом ашёлар захираси
	$M_1$	$M_2$	
<b>A</b>	2	3	9
<b>B</b>	3	2	13
<b>Бир бирлик маҳсулотдан олинадиган даромад</b>	3	4	

Иш тажрибаси шуни кўрсатадики, суткасига  $M_1$  маҳсулотга бўлган талаб  $M_2$  маҳсулотга бўлган талабдан бир бирликдан кўп бўлмайди. Бундан ташқари суткасига  $M_2$  маҳсулотга бўлган талаб 2 бирликдан кўп бўлмайди.

Маҳсулот ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

Ечиш: Масаланинг математик модели:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(A хом ашё)} \\ \text{(B хом ашё)} \end{array}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

(талаб)

(талаб)

Иккиланган масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$G = 9y_1 + 13y_2 + y_3 + 2y_4 \rightarrow \min$$

бўлади.



Берилган масаланинг ечимини топиш мақсадга мувофиқдир. Бу масалани симплекс усулда ечамиз.

Б	C <sub>6</sub>	A <sub>0</sub>	3	4	0	0	0	0
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>
A <sub>3</sub>	0	9	2	3	1	0	0	0
A <sub>4</sub>	0	13	3	2	0	1	0	0
A <sub>5</sub>	0	1	1	-1	0	0	1	0
A <sub>6</sub>	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ <sub>i</sub>		0	-3	-4	0	0	0	0
A <sub>3</sub>	0	7	0	5	1	0	-2	0
A <sub>4</sub>	0	10	0	5	0	1	-3	0
A <sub>1</sub>	3	1	1	-1	0	0	1	0
A <sub>6</sub>	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ <sub>i</sub>		3	0	-7	0	0	3	0
A <sub>2</sub>	4	7/5	0	1	1/5	0	-2/5	0
A <sub>4</sub>	0	3	0	0	-1	1	-1	0
A <sub>1</sub>	3	12/5	1	0	1/5	0	3/5	0
A <sub>6</sub>	0	3/5	0	0	-1/5	0	2/5	1
Δ <sub>i</sub>		64/5	0	0	7/5	0	1/5	0

Натижада иккала масала учун оптимал ечимларни топамиз. Берилган масала учун:

$$X_{\text{опт}} = (12/5; 7/5) \quad F_{\text{max}} = 64/5 = 12,8$$

Иккиланган масала учун

$$Y_{\text{опт}} = (7/5; 0; 1/5; 0) \quad G_{\text{min}} = 64/5 = 12,8 \quad \text{бўлади.}$$

Иккиланган масала ечимида  $y_2 = y_4 = 0$ , бинобарин, II ва IV ресурслар нотанқис ресурслардир. II ресурс (B хом ашёнинг) ортиқчаси 3 бирликни ( $x_4 = 3$ ), IV ресурсларнинг ортиқчаси эса 0,6 бирликни ( $x_6 = 0,6$ ) ташкил қилади.

Иккиланган масала ечимида  $y_1 = 7/5$  ва  $y_3 = 1/5$ . Демак, I ва III ресурслар тўла ишлатилган, яъни уларнинг танқис ресурслар эканлигини кўрсатади. Қаралаётган масалада A тур хом ашё захираси  $\Delta b_1 = 1$  бирликка оширилса, мақсад функциясининг қиймати 1,4

$$\text{бирликка ошади: } \Delta F = y_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{7}{5} \cdot 1 = 1,4$$

Агар ишлаб чиқаришда A тур хом ашёдан бир бирлик ортиқча сарф қилинса, унинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Шу янги режага мувофиқ маҳсулот ишлаб чиқарилса, даромад

$$F_{\text{max}} = 12,8 + 1,4 = 14,2$$

ни ташкил қилади.

Жадвални A<sub>4</sub> устунига қараб хулоса чиқарамиз:

Янги режада M<sub>1</sub> ва M<sub>2</sub> маҳсулотларнинг ишлаб чиқарилиши  $1/5 = 0,2$  бирликка ошади. Бунинг натижасида A тур хом ашёни сарф қилиши бир бирликка кўпроқ бўлади:

$$\frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1$$

Худди шунингдек, III ресурс  $\Delta b_3 = 1$  бирликка оширилса, яъни суткасига M<sub>1</sub> маҳсулотга бўлган талаб M<sub>2</sub> маҳсулотга қараганда 2 бирликдан кўп бўлмаслиги қаралса, мақсад функциянинг қиймати

$$\Delta F = y_3 \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{5} \cdot 1 = 0,2 \quad \text{бирликка ошади.}$$

Жадваални  $A_5$  устунига қараб хулоса чиқарамиз:

Янги режада  $M_1$  маҳсулотни ишлаб чиқариши  $3/5$  бирликка ошади ва  $M_2$  маҳсулотники эса  $2/5$  бирликка камаяди. Натижада III тур ресурс

$$1 \cdot \frac{3}{5} - 1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = 1 \quad \text{бирликка кўпроқ бўлади.}$$

Иккиланган оптимал баҳоларни иккиланган масала шартларига қўямиз:

$$2 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot 0 + \frac{1}{5} = 3$$

$$3 \cdot \frac{7}{5} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{5} + 0 = 4$$

шартлар тенгликка айланди, яъни корхона ҳар иккала маҳсулотни ҳам ишлаб чиқарса мақсадга мувофиқ бўлади. Бу иккала маҳсулотнинг ишлаб чиқарилиши берилган масаланинг оптимал ечимиди ҳам назарда тутилган.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Корхона 4 хил маҳсулотни ишлаб чиқариши учун 3 тур ресурслардан фойдаланади. Бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқаришда сарф қилинадиган ресурслар нормаси, ресурсларнинг захиралари, ҳамда бир бирлик маҳсулот нархи қуйидаги жадвалда берилган.

Ресурс тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган ресурслар нормаси				Ресурслар захираси
	A	B	C	D	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Бир бирлик маҳсулотнинг нархи	9	6	4	7	

Ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

I тур ресурс захираси 60 бирликка камайтирилиб, II ва III тур ресурс захиралари 120 ва 160 бирликка оширилганда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг энг катта даромадининг ўзгариши таҳлил асосида аниқлансин.

2. Корхона ҳар хил A, B, C буюмларни ишлаб чиқариши учун 3 тур хом ашёлардан фойдаланади. Бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқаришда сарф қилинган хом ашёлар нормаси, хом ашёлар захиралари, ҳамда бир бирлик маҳсулотдан келадиган даромад қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган хом ашёлар нормаси (кг)			Хом ашёлар захира-лари
	А	В	С	
<b>I</b>	18	15	12	360 кг
<b>II</b>	6	4	8	192 кг
<b>III</b>	5	3	3	180 кг
<b>Бир бирлик буюмдан олинадиган даромад</b>	9	10	16	

а) ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

б) I, II ва III тур хом ашёлар захиралари мос равишда 30, 40 ва 50 кг га оширилганда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг энг катта даромадининг ўзгариши таҳлил асосида аниқлансин.

3. Уч хил А, В ва С маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун уч хил хом ашёлардан фойдаланади. Ҳар бир хом ашёдан мос равишда 180, 210 ва 236 кг ҳажмдан кўп бўлмаган миқдорда ишлатиш мумкин. Бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун ҳар бир тур хом ашёлар сарфи, ҳамда бир бирлик маҳсулотдан олинадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган.

Хом ашё тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган хом ашёлар нормаси (кг)		
	А	В	С
<b>I</b>	4	2	1
<b>II</b>	3	1	3
<b>III</b>	1	2	5
<b>Бир бирлик буюмдан келадиган даромад</b>	10	14	12

а) ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

б) I, II ва III тур хом ашёлар захиралари мос равишда 30, 40 ва 50 кг га оширилганда мақсад функция максимумининг ўзгариши таҳлил асосида аниқлансин.

4.7- машғулот масалаларининг оптимал ечимини таҳлил қилинг.

**Жавоблар:**

1.  $\Delta F_{1\max} = 0$ ;  $\Delta F_{2\max} = 180$ ;  $\Delta F_{3\max} = 360$ ;  $\Delta F_{\max} = 540$ ;
2.  $\Delta F_{1\max} = \frac{20}{3}$ ;  $\Delta F_{2\max} = \frac{200}{3}$ ;  $\Delta F_{3\max} = 0$ ;  $\Delta F_{\max} = \frac{220}{3}$ ;
3.  $\Delta F_{1\max} = -230$ ;  $\Delta F_{2\max} = 0$ ;  $\Delta F_{3\max} = 200$ ;  $\Delta F_{\max} = -30$ ;

## 9- машғулот

### Иккиланган симплекс усул.

Баъзан берилган масаланинг оптимал ечимини топиш учун ,аввало, иккиланган масалани ечиб, унинг баҳолари асосида берилган масаланинг ечимини топиш мумкин бўлади. Масалан, 7-машғулотнинг 5- масаласини ечишда шунга амал қилган эдик. Аммо иккиланган масалага ўтиш шарт эмас экан.

Ҳақиқатдан ҳам, ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган  $A_j$  векторларнинг  $m$  таси бирлик векторлар бўлган чизиқли программалаш масаласининг бошланғич симплекс-жадвалига қарайлик. Устунларида берилган масала ва сатрларида эса иккиланган масала ёзилган эканлигини осонлик билан пайқаш мумкин. Бундан ташқари, берилган масаланинг баҳолари  $c_j$  ва иккиланган масаланинг баҳолари эса  $b_i$  бўлади. Шу сабабдан берилган масала ёзилган симплекс-жадвал асосида иккиланган масалани ечсак бўлар экан. Натижада иккиланган масаланинг оптимал ечими ва  $u$  билан биргаликда берилган масаланинг оптимал ечими топилади. Бундай усул иккиланган симплекс усул дейилади.

Симплекс усул ва иккиланган симплекс усулда бошланғич жадвал бир-биридан фарк қилмайди.

Симплекс усулда жадвални алмаштириш учун (янги ечимни топиш учун) олдин базисга киритиладиган вектор танланиб, сўнгра базисдан чиқадиган вектор аниқланар эди. Иккиланган симплекс усулда энг аввало базисдан чиқариладиган вектор

$$\min_{b_i < 0} b_i = b_l$$

шарт асосида танланади. Бундай вектор  $A_l$  вектори бўлади. Сўнгра базисга киритиладиган вектор танланади. Бунинг учун

$$\min_{a_{lj} < 0} \left( \frac{\Delta_j}{a_{lj}} \right)$$

ни топамиз. Агар бу минимумга  $j=l$  да эришса, унда  $A_l$  вектор базисга киритилади, яъни  $a_{ll}$  ҳал қилувчи элемент бўлади. Симплекс жадвал оддий симплекс усулдагидек алмаштирилади. Бу жараён  $A_0$  устунида бирорта ҳам манфий сон қолмагунча давом эттирилади. Натижада берилган масала ҳамда иккиланган масаланинг оптимал ечими топилади. Агар бирор кадамда симплекс жадвалининг  $i$ - сатрида  $A_0$  устунидаги  $b_i$  элемент манфий сон бўлиб, бу сатрда бошқа бирорта ҳам манфий элемент бўлмаса, берилган масала мусбат ечимга эга бўлмайди.

Масала. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

масалани иккиланган симплекс усулда ечинг.

Ечиш. Бу масалани куйидаги кўринишга келтириш қийин эмас.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

$A_3, A_4, A_5$  векторларни базис сифатида танлаб олиб бошланғич симплекс жадвални тузамиз:

Б	$C_6$	$A_0$	-1	-1	-2	0	0
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_3$	-2	8	1	1	1	0	0
$A_4$	0	-4	-1	1	0	1	0
$A_5$	0	-6	-1	-2	0	0	1
$\Delta_j$		-16	-1	-1	0	0	0

$A_0$  устунда иккита манфий сонлар (-4;-6) бор . Базисдан чиқариладиган вектор  $\min(-4;-6)=-6$  шарти асосида танланади. Яъни,  $A_5$  векторни базисдан чиқарилади. Базисга киритиладиган векторни аниқлаш учун

$$\min_{a_{3j} < 0} \left( \frac{\Delta_j}{a_{3j}} \right) = \min \left\{ \frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-2} \right\} = \frac{1}{2}$$

ни топамиз. Демак, базисга  $A_2$  векторни киритамиз. Натижада симплекс жадвал алмашади.

Б	$C_6$	$A_0$	-1	-1	-2	0	0
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_3$	-2	5	1/2	0	1	0	1/2
$A_4$	0	-7	-3/2	0	0	1	1/2
$A_2$	1	3	1/2	1	0	0	1/2
$\Delta_j$		-13	-1/2	0	0	0	-1/2

$A_0$  векторнинг устунда -7 манфий сон бор ва бу сатрнинг бошқа элементлари ичида битта манфий сон -3/2 мавжуд. Демак, базисдан  $A_4$  ни чиқариб, унинг ўрнига  $A_1$  ни киритамиз:

Б	$C_6$	$A_0$	-1	-1	-2	0	0
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_3$	-2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
$A_1$	-1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3
$A_2$	-1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3
$\Delta_j$		-32/3	0	0	0	-1/3	-2/3

Жадвалдан кўриниб турибдики, берилган ва иккиланган масалаларнинг оптимал ечимлари мос равишда  $X=(14/3; 2/3; 8/3; 0)$  ва  $Y=(2; 1/3; 2/3)$  бўлиб,  $F_{\min} = G_{\max} = -\frac{32}{3}$  бўлади.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги масалаларни иккиланган симплекс усулида ечинг.

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \mathcal{K} : X = (6; 2; 0); F_{\max} = 8$$

$$F(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : X = (3; 0; 0; \frac{1}{2}); F_{\max} = -\frac{29}{2}$$

$$F(x) = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$4. \begin{cases} 1,5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : X = (8; 2; 0; 0); F_{\min} = 52$$

$$F(x) = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$5. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : X = (2; 0; 0; 5); F_{\min} = 12$$

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \geq 24 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathcal{K} : X &= (3; 0; 0; 0; 9; 0); \\ F_{\max} &= -75 \end{aligned}$$

$$F(x) = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \rightarrow \max$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 24 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \geq 12 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \mathcal{K} : X = (0; 3; 10; 0; 19); F_{\max} = 11$$

$$F(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 16 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \mathcal{J} : X = (4; 0; 4; 0; 26); F_{\max} = 48$$

$$F(x) = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$$

$$9. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 18 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{J} : X = (0; 12; 0; 6); F_{\max} = 126$$

$$F(x) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$10. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathcal{J} : \text{Берилган масала} \\ \text{ечимга эга эмас.} \end{array}$$

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \rightarrow \max$$



## 10- машғулот

### Транспорт масаласини ечишда потенциаллар усули.

Маълумки, ихтиёрый чизикли программалаш масаласининг оптимал ечимини топиш жараёни бошланғич таянч ечимни куришдан бошланади. Транспорт масаласини бошланғич таянч ечимини илгари фойдаланган усуллар ёрдамида топиш мумкин, бироқ бу айрим қийинчиликларни юзага келтиради. Транспорт масаласини бошланғич таянч ечимини куришининг бир нечта оддий схемалари мавжуд. Дастлаб ёпиқ модели транспорт масаласини қараймиз.

#### 1. Шимоли- ғарбий бурчак усули.

Режалаштириш жадвалида йўл ҳаражати ҳисобга олмай  $V_1$  истеъмолчининг талабини дастлаб  $A_1$  таъминотчи ҳисобидан қондираимиз. Бунинг учун  $\min(a_1, b_1)$  ни  $(A_1, V_1)$  катакчанинг чап пастки бурчагига ёзамиз, яъни  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ . Агар  $a_1 < b_1$  бўлса,  $V_1$  нинг эҳтиёжини тўла қондириш учун  $(A_2, V_1)$  катакчага етишмайдиган юк бирлигини  $A_2$  дан олиб ёзамиз ва ҳ.к. Бу жараёни  $(A_m, V_n)$  катакчага етгунча давом эттираимиз. Натижада банд катакчалар сони  $m+n-1$  дан ошмайди ва тузилган ечим таянч ечим бўлади. Агар банд катакчалар сони  $m+n-1$  га тенг бўлса, бузилмаган таянч ечим ҳосил бўлади.

Мисол. Ушбу транспорт масаласининг бошланғич ечимини топинг.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира ҳажми
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	
$A_1$	3	5	7	11	100
$A_2$	1	4	6	2	130
$A_3$	5	8	12	7	170
Талаб ҳажми	150	120	80	50	

(1)

Ечиш. Бошланғич таянч ечимини шимоли -ғарбий бурчак усули билан топамиз. Бунинг учун режалар матричасини қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$b_j$	150	120	80	50
$a_i$				
	3	5	7	11
100	100			
	1	4	6	2
130	50	80		
	5	8	12	7
170		40	80	50

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Бу жадвалда  $a_i$  билан таъминотчилардаги маҳсулот захирасини,  $b_j$  билан эса истеъмолчиларнинг маҳсулотга бўлган талабини белгиладик. Топилган таянч режа куйидагидан иборат:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Банд катакчалар сони роса  $m+n-1=3+4-1=6$  га тенг. Тузилган бошланғич ечим бузилмаган таянч ечим (режа) бўлади.

Тузилган режага мос келувчи харажатни ҳисоблаймиз.

$$F(X) = 100 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 80 \cdot 4 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2300$$

## 2. Минимал харажатлар усули.

Бу усулда бошланғич ечим куриш учун аввал йўл харажати энг кичик бўлган катакчага  $a_i$  ва  $b_j$  лардан кичиги ёзилади ва навбатдаги энг кичик харажатли катакчага ўтилади ва х.к. Бу усулда тузилган бошланғич ечимни циклланишга текшириш шарт.

Мисол. Юқорида берилган транспорт масаласининг бошланғич ечимини “минимал харажатлар” усули ёрдамида тузинг.

Ечиш.

$b_j$	150	120	80	50
$a_i$				
100	20	80		
130	130			
170		40	80	50

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Бунда ҳам банд катакчалар сони 6 га тенг бўлди, яъни тузилган бошланғич ечим бузилмаган таянч ечим бўлиб чиқди. Ечим тузилаётганда йўл харажати инобатга олинди. Шу сабабдан тузилган режанинг харажати олдинги ечим харажатидан кичик ва оптимал ечимга яқинроқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$F(X) = 20 \cdot 3 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2200$$

Бошланғич ечим куришнинг яна бошқа усуллари ҳам мавжуд.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган усуллар ёрдамида бошланғич таянч ечим куриш мумкин.

Тузилган бошланғич таянч ечимни потенциаллар усули ёрдамида оптимал ечимгача етказиш мумкин.

Потенциаллар усули.

Теорема. Агар транспорт масаласининг  $X=(x_{ij})$  ечими оптимал бўлса, унга қуйидаги шартларни

$$U_i + V_j = C_{ij} \quad , \quad \text{агар } x_{ij} > 0,$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \quad , \quad \text{агар } x_{ij} = 0.$$

$$i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n.$$

қаноатлантирувчи  $m+n$  та сонлар мос келади.

$U_i$  ва  $V_j$  сонлар мос равишда “таъминотчи” ва “истеъмолчи”-ларнинг потенциаллари дейилади.

Шундай қилиб, ечимнинг оптималлигини текшириш учун энг аввало потенциаллар системасини куриш зарур экан.

Потенциаллар системасини куриш.

Потенциаллар системасини барча банд катакчалар учун

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

кўринишда тузамиз.

Потенциаллар системасини фақат бузилмаган таянч ечим учун куриш мумкин. Бундай ечим учун  $m+n-1$  банд катакча мос келади. Номалум потенциаллар сони эса  $m+n$  га тенг. Яъни потенциалларни топиш учун  $m+n$  номалумли  $m+n-1$  боғлиқмас тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу система аниқмас система бўлади. Шунинг учун бирор номалумга (одатда  $U_1$  га) ноль қиймат берилади ( $U_1=0$ ). Бундан бошқа потенциаллар бир қийматли ҳолда аниқланади. Сўнгра ҳар бир бўш катакча учун мос потенциаллар  $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} \leq 0$  шартни қаноатлантиришини текшираемиз. Агар бу шартлар барча бўш катакчаларда бажарилса, топилган таянч ечим оптимал бўлади. Агарда бу шартлар айрим бўш катакчаларда бажарилмаса, яъни,  $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} > 0$  бўлса, у ҳолда таянч ечим учун оптималлик шarti бажарилмайди. Ундан бошқа таянч ечимга ўтиш керак бўлади. Навбатдаги таянч ечимга ўтиш учун  $\Delta_{ij}$  ларнинг энг каттасига мос келган катакча тўлдирилади. Бунинг учун унга  $\theta$  сон қўшилади ва шу катакчадан бошлаб вертикал ва горизонтал йўналишлар бўйлаб банд катакчалардаги тақсимотлардан  $\theta$  ни айириб ва қўшиб бориб ёпиқ контур чизилади. Кўпбурчакнинг учларига ”+ $\theta$ ” ишорали катакчадан бошлаб кетма-кет “- $\theta$ ” ва ”+ $\theta$ ” белгилар қўйиб чиқилади. Сўнгра “-” ишорали катакчалардаги тақсимотлари ичидан энг кичигини  $\theta$  нинг сон қиймати деб қабул қилинади ва у ”+” ишорали катакчаларга қўшилади ва “-” манфий ишорали катакчалардан айирилади. Натижада банд катакчалар сони  $m+n-1$  та бўлган янги таянч режа ҳосил бўлади. Бунда айрим банд катакчалардаги юк бирлиги ноль бўлиб қолиши мумкин.

Мисол. Юқорида келтирилган транспорт масаласини потенциаллар усули билан ечинг.

Ечиш. Бу масаланинг шимоли-ғарбий бурчак усули билан топилган таянч ечими учун мос потенциаллар системасини кўрайлик.

$b_j$ $a_i$	150	120	80	50	$U_i$
100	$100 - \theta$	1	$+\theta$ 3	$\ominus 6$	0
130	$50 + \theta$	$80 - \theta$	2	1	-2
170	0	$40 + \theta$	$80 - \theta$	50	2
$V_j$	3	6	10	5	$\theta = 80$

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

$$F(X_0) = 2300$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_1 + V_1 = 3 & U_1 = 0 \quad V_1 = 3 \\ U_2 + V_1 = 1 & U_2 = 1 - V_1 = 1 - 3 = -2 \\ U_2 + V_2 = 4 & V_2 = 4 - U_2 = 4 + 2 = 6 \\ U_3 + V_2 = 8 & U_3 = 8 - V_2 = 8 - 6 = 2 \\ U_3 + V_3 = 12 & V_3 = 12 - U_3 = 12 - 2 = 10 \\ U_3 + V_4 = 7 & V_4 = 7 - U_3 = 7 - 2 = 5 \end{array} \right.$$

Энди бўш катаклар учун оптималлик шартини текшираимиз:

$$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = 1; \quad \Delta_{23} = (U_2 + V_3) - C_{23} = 2$$

$$\Delta_{13} = (U_1 + V_2) - C_{13} = 3; \quad \Delta_{24} = (U_2 + V_4) - C_{24} = 1$$

$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -6; \quad \Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = 0$$

Кўриниб турибдики  $\Delta_{ij}$  лар ичида мусбатлари бор. Демак, бу режа оптимал эмас. Янги таянч режага ўтаимиз:

$\max \{3; 2; 1\} = 3 = \Delta_{13}$ . Демак, жадвалда  $(A_1, B_3)$  катакчага " $+\theta$ " белги киритамиз ва ёпик контур ясаймиз. " $-\theta$ " белгини катакчалардаги тақсимотлари ичидаги энг кичигини танлаб уни  $\theta$  нинг сон қиймати деб қабул қиламиз.

$$\theta = \min \{100, 80\} = 80$$

$\theta = 80$  ни "+" ишорали катакчаларга қўшиб ва "-" ишорали катакчалардан айириб, янги таянч режа тузамиз:

$b_j$	150	120	80	50	$U_i$
$a_i$					
100	20	1	80	-6	0
130	130	0- $\theta$	-1	+ $\theta$ 1	-2
170	0	120+ $\theta$	-3	50- $\theta$	2
$V_j$	3	6	7	5	$\theta = 0$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 1300 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$F(X_1) = 2060$$

$X_1$ -айниган таянч режа бўлмаслиги учун  $(A_2, B_2)$  ва  $(A_3, B_3)$  катакчалардан биттасини, яъни ҳаражати катта бўлган  $(A_3, B_3)$  катакчани бўш катакчага айлантириб,  $(A_2, B_2)$  катакчадаги тақсимотни эса 0 га тенг деб қабул қиламиз ва бу катакчани банд катакча деб қараймиз, ҳамда потенциал тенгламалар тузиб, потенциалларнинг сон қийматини топамиз:

$$\begin{aligned} U_1 + V_1 &= 3; & U_1 &= 0; & V_1 &= 3; \\ U_1 + V_3 &= 7; & U_2 &= -2; & V_3 &= 7; \\ U_2 + V_1 &= 1; & U_3 &= 2; & V_2 &= 6; \\ U_2 + V_2 &= 4; & & & & \\ U_3 + V_2 &= 8 & & & & \\ U_3 + V_4 &= 7 & & & & \end{aligned}$$

Энди бўш катакчалар учун оптималлик шартини текшираемиз:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (U_1 + V_2) - C_{12} = 1; \\ \Delta_{14} &= (U_1 + V_4) - C_{14} = -6; \\ \Delta_{23} &= (U_2 + V_3) - C_{23} = -1; \\ \Delta_{31} &= (U_3 + V_1) - C_{31} = 0; \\ \Delta_{33} &= (U_3 + V_3) - C_{33} = -3; \\ \Delta_{24} &= (U_2 + V_4) - C_{24} = 1; \end{aligned}$$

$X_1$  режа оптимал эмас, чунки  $\Delta_{31} = \Delta_{12} = 1 > 0$ . Демак, жадвалдаги  $(A_3, B_1)$  ва  $(A_1, B_2)$  катакчалардан ҳаражати камига “+ $\theta$ ” белги қўйиб, ёпиқ кўпбурчак ясаймиз ва  $\theta$  ни топамиз.

$$\theta = \min\{50, 0\} = 0$$

яъни таянч режа тузамиз.

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50	$U_i$
100	20	0	80	$\ominus 7$	0
130	$130 - \theta$	$\ominus 1$	$\ominus 1$	$0 + \theta$	-2
170	$+\theta$ 1	120	$\ominus 2$	$50 - \theta$	3
$V_j$	3	5	7	4	$\theta = 50$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$F(X_2) = 2060$$

Топилган янги  $X_2$  режа оптимал ечим бўлмайди, чунки

$$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = 1 > 0;$$

Навбатдаги таянч ечимга ўтиш учун  $(A_3, B_1)$  катакчага « $+\theta$ » белги қўйиб, ёпик контур тузамиз ва  $\theta = 50$  ни топамиз.

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50	$U_i$
100	$20 - \theta$	$+\theta$ 1	80	$\ominus 7$	0
130	80	0	$\ominus 1$	50	-2
170	$50 + \theta$	$120 - \theta$	$\ominus 3$	$\ominus 1$	2
$V_j$	3	6	7	4	$\theta = 20$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(X_3) = 2010$$

ҳосил бўлган таянч режа оптимал ечим бўлмайди, чунки  $\Delta_{12} = 1 > 0$ . Янги таянч ечимга ўтиш учун  $(A_1, B_2)$  катакчага « $+\theta$ » белги қўямиз ва ёпик контур тузиб  $\theta = 20$  эканлигини аниқлаймиз ва янги  $X_4$  режани топамиз.

$b_j$	150	120	80	50	$U_i$
$a_i$					
100	3 -1	5 20	7 80	11 -8	0
130	1 80	4 0	6 0	2 50	-1
170	5 70	8 100	12 -2	7 -1	3
$V_j$	2	5	7	3	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(X_4) = 1990$$

$X_4$  айнимаган таянч ечим. Бу ечим оптимал ечим бўлади, чунки у учун оптималлик шартларини барчаси бажарилади:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (U_1 + V_1) - C_{11} = -1; \\ \Delta_{14} &= (U_1 + V_4) - C_{14} = -8; \\ \Delta_{22} &= (U_2 + V_2) - C_{22} = 0; \\ \Delta_{23} &= (U_2 + V_3) - C_{23} = 0; \\ \Delta_{33} &= (U_3 + V_3) - C_{33} = -2; \\ \Delta_{34} &= (U_3 + V_4) - C_{34} = -1; \end{aligned}$$

Демак,  $X_4 = X_{\text{опт}}$ ;  $F_{\min} = F(X_4) = 1990$ .

### Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги транспорт масалаларининг оптимал ечими топилсин.

1.

Таъминогчилар	Истеъмолчилар				Заҳира ҳажми.
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	2	1	4	1	90
$A_2$	2	3	3	2	55
$A_3$	3	2	3	2	80
Талаб ҳажми	70	40	70	45	

2.

Таъминогчилар	Истеъмолчилар				Заҳира ҳажми.
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	6	7	3	5	100
$A_2$	1	2	5	6	150
$A_3$	8	10	20	1	50
Талаб ҳажми	75	80	60	85	

3.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира ҳажми.
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	8	1	9	7	110
$A_2$	4	6	2	12	190
$A_3$	3	5	8	9	90
Талаб ҳажми	80	60	170	80	

4.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира ҳажми.
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	1	2	3	4	60
$A_2$	4	3	2	0	80
$A_3$	0	2	2	1	100
Талаб ҳажми	40	60	80	60	

5.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира ҳажми.
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	1	2	4	1	50
$A_2$	2	3	1	5	30
$A_3$	3	2	4	4	10
Талаб ҳажми	30	30	10	20	

6.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар					Захира ҳажми.
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7	12	4	8	5	180
$A_2$	1	8	6	5	3	350
$A_3$	6	13	8	7	4	20
Талаб ҳажми	110	90	120	80	150	

7.

$b_i \backslash a_j$	30	30	30
20	1	4	5
30	5	1	4
40	4	5	1

8.

$b_i \backslash a_j$	120	80	50
130	1	7	6
70	6	1	1
50	7	6	1



9.

$b_i \backslash a_j$	150	150	100
200	1	3	4
150	4	3	1
50	3	1	4

10

$b_i \backslash a_j$	70	70	70
110	1	3	3
70	3	1	3
30	3	3	1

11.

$b_i \backslash a_j$	70	50	50
50	8	6	1
60	1	8	6
60	6	8	1

13.

$b_i \backslash a_j$	80	80	80
160	2	7	9
40	3	3	6
40	4	2	7

12.

$b_i \backslash a_j$	120	90	70
100	2	5	3
90	3	2	5
90	5	3	2

14.

$b_i \backslash a_j$	130	60	40
20	1	3	2
150	2	1	3
60	3	1	2

15.

$b_i \backslash a_j$	20	30	30	10
30	2	3	2	4
40	3	2	5	1
20	4	3	2	6

16.

$b_i \backslash a_j$	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4

17.

$b_i \backslash a_j$	70	90	110	150
120	2	5	4	6
130	3	11	3	2
150	3	10	3	2

18.

$b_i \backslash a_j$	250	300	350	300
350	2	3	4	3
300	2	3	1	2
550	3	1	3	4

Жавоблар:

$$1. X = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 0 & 35 \\ 55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 10 \end{pmatrix}; F_{\min} = 445.$$

$$2. X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}; F_{\min} = 665.$$

$$3. X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}; F_{\min} = 1280.$$

$$4. X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 60 \\ 40 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}; F_{\min} = 280.$$

$$5. X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}; F_{\min} = 140.$$

$$6. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 110 & 90 & 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}; F_{\min} = 2300.$$

## 11-машгулот

### “Очиқ модели” транспорт масаласи. Хос («бузилган») транспорт масаласи

ва уни ечишнинг  $\mathcal{E}$  - усули.

Юқоридаги масалада талаб ва таклифнинг (заҳира ҳажмининг) умумий миқдорлари тенг бўлган эди. Бундай масалаларни “ёпиқ модели” транспорт масаласи дейилади. Акс ҳолда масала “очиқ модели” транспорт масаласи дейилади. Бундай масалани оптимал ечимини топиш учун ёпиқ моделга келтирилади ва потенциаллар усули қўлланилади.

“Очиқ модели” масалани ёпиқ моделга келтириш учун “сохта таъминотчи ёки истеъмолчи” киритилади, уларнинг заҳираси ёки талаб ҳажми  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i$  ёки

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j$  бўлади. “Сохта таъминотчидан ” реал истеъмолчига ёки реал

таъминотчидан “сохта истеъмолчига” амалда юк ташилмагани учун йўл ҳаражатлари нолга тенг деб олинади.

Мисол. Қуйидаги очиқ модели транспорт масаласини ёпиқ модели транспорт масаласига айлантиринг ва унинг оптимал ечимини топинг.

$b_i \backslash a_j$	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Бу масалада

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 16 \quad \rangle \quad \sum_{j=1}^5 b_j = 13$$

Шунинг учун талаби

$$b_6 = 16 - 13 = 3$$

бўлган «сохта истеъмолчи»ни киритамиз ва режалар жадвалини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$b_i \backslash a_j$	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Ҳосил бўлган ёпиқ модели масалани потенциаллар усулини қўллаб ечамиз ва 7-кадамда қуйидаги оптимал ечимни топамиз:

$b_i \backslash a_j$	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0
	3	2				2

Жавоб:  $x_{12}=1$ ;  $x_{13}=3$ ;  $x_{24}=2$ ;  $x_{25}=2$ ;  $x_{26}=1$ ;  $x_{31}=3$ ;  $x_{32}=2$ .

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad F(X_{opt}) = 13$$

Демак, таъминотчилардаги маҳсулотларни энг кам харажат сарф қилиб истеъмолчиларга тақсимлаш учун 2- таъминотчида 1 бирлик ва 3- таъминотчида 2 бирлик маҳсулот тақсимланмасдан қолиши керак экан.

### Хос («бузилган») транспорт масаласи ва уни ечишнинг $\varepsilon$ - усули.

Агар транспорт масаласининг таянч режасидаги мусбат компоненталар сони  $k < n+m-1$  бўлса, бундай режа хос («бузилган») режа бўлади. Бундай режани тузатиш учун унга  $n+m-1-k$  та ноль элемент киритиш мумкин. Киритилган ноль элементларга мос келувчи векторлар ўзаро чизикли эркин бўлиши керак. Бунга эришиш учун қуйидаги  $\varepsilon$ -усулни қўллаш керак.

Одатда транспорт масаласидаги  $a_i$  ва  $b_j$  ларнинг хусусий йиғиндилари тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий усул билан топилган таянч режа «бузилган» бўлади. Демак, хослик ҳолатини олдини олиш учун  $a_i$  ва  $b_j$  лардан тузилган хусусий йиғиндиларнинг тенг бўлмаслигига эришиш керак. Бунинг учун эса етарлича кичик  $\varepsilon > 0$  сон олиб,  $a_i$  ва  $b_j$  ларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \overline{a}_i &= a_i + \varepsilon, & (i = \overline{1, m}); \\ \overline{b}_j &= b_j, & (j = \overline{1, n-1}); \\ \overline{b}_n &= b_n + m\varepsilon, \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган масалани ечиб,  $X(\varepsilon)$  оптимал режа топилади. Ундан  $\varepsilon = 0$  деб қабул қилиб берилган масаланинг оптимал ечими топилади.

Мисол.

Қуйидаги транспорт масаласини  $\varepsilon$  - усулни қўллаб ечинг.

$b_i \backslash a_j$	12	14	10	24
14	1	5	3	2
12	6	3	2	1
12	4	2	1	5
22	2	6	5	3

Ушбу масалада  $a_1+a_2$  ва  $b_1+b_2$  хусусий йиғиндилар ўзаро тенг. Демак, бу масаланинг таянч ечими «бузилган» бўлиши мумкин. Буни олдини олиш учун масалани қуйидаги кўринишда ёзамиз ва потенциаллар усулини қўллаб ечамиз:

$b_i \backslash a_j$	12	14	10	$24+4\varepsilon$	$U_i$
$14+\varepsilon$	1 12	5 0	3 1	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 1	2 + $\theta$ 1	1 $12+\varepsilon -\theta$	-1
$12+\varepsilon$	4 -6	2 $2+\varepsilon+\theta$	1 10- $\theta$ 1	5 -6	-3
$22+\varepsilon$	2 0	6 $12-\varepsilon-\theta$	5 0	3 $10+2\varepsilon+\theta$	1
$V_j$	1	5	4	2	$\theta =10$

$b_i \backslash a_j$	12	14	10	$24+4\varepsilon$	$U_i$
$14+\varepsilon$	<sup>1</sup> 12	<sup>5</sup> 0	<sup>3</sup> 0	<sup>2</sup> $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	<sup>6</sup> -6	<sup>3</sup> $+\theta$ <sub>1</sub>	<sup>2</sup> 10	<sup>1</sup> $2+\varepsilon-\theta$	-1
$12+\varepsilon$	<sup>4</sup> -6	<sup>2</sup> $12+\varepsilon$	<sup>1</sup> -1	<sup>5</sup> -6	-3
$22+\varepsilon$	<sup>2</sup> 0	<sup>6</sup> $2-\varepsilon-\theta$	<sup>5</sup> -1	<sup>3</sup> $20+2\varepsilon+\theta$	1
$V_j$	1	5	3	2	$\theta=2-\varepsilon$

$b_i \backslash a_j$	12	14	10	$24+4\varepsilon$	$U_i$
$14+\varepsilon$	<sup>1</sup> 12	<sup>5</sup> -1	<sup>3</sup> 0	<sup>2</sup> $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	<sup>6</sup> -6	<sup>3</sup> $2-\varepsilon$	<sup>2</sup> 10	<sup>1</sup> $3\varepsilon$	-1
$12+\varepsilon$	<sup>4</sup> -5	<sup>2</sup> $12+\varepsilon$	<sup>1</sup> 0	<sup>5</sup> -5	-2
$22+\varepsilon$	<sup>2</sup> 0	<sup>6</sup> -1	<sup>5</sup> -1	<sup>3</sup> $22+\varepsilon$	1
$V_j$	1	4	3	2	

$$X_{onm}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 2+\varepsilon \\ 0 & 2-\varepsilon & 10 & 3\varepsilon \\ 0 & 12+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22+\varepsilon \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0 \quad \partial a$$

$$X_{onm} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \quad F(X_{onm}) = 132.$$

## Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги транспорт масалаларининг оптимал ечимини топинг ва керак бўлган холларда  $\varepsilon$  - усулни қўлланг.

1.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира хажми
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	1	7	9	5	120
$A_2$	4	2	6	8	280
$A_3$	3	8	1	2	160
Талаб хажми	130	220	60	70	

2.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира хажми
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	5	4	3	4	160
$A_2$	3	2	5	5	140
$A_3$	1	6	3	2	60
Талаб хажми	80	80	60	80	

3.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира хажми
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	4	2	3	1	80
$A_2$	6	3	5	6	140
$A_3$	3	2	6	3	70
Талаб хажми	80	50	50	70	

4.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира хажми
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	6	7	3	2	180
$A_2$	5	1	4	3	90
$A_3$	3	2	6	2	170
Талаб хажми	45	45	100	160	

5.

$b_i \backslash a_j$	20	30	20	50
20	4	1	3	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4



6.

$b_i \backslash a_j$	60	40	40	30	50
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

7.

$b_i \backslash a_j$	50	40	40	15	25
70	6	3	1	5	7
20	8	4	2	4	3
50	3	5	5	6	2
50	5	1	1	3	6

8. Қуйидаги очик модели транспорт масалаларини ечинг.

а)

$b_i \backslash a_j$	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

б)

$b_i \backslash a_j$	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

в)

$b_i \backslash a_j$	100	110	120	90
115	9	8	10	11
125	11	10	9	8
160	3	7	5	6

г)

$b_i \backslash a_j$	90	90	90	90
100	2	7	9	10
120	3	3	6	8
180	4	2	7	4

9. Берилган масалаларни  $\mathcal{E}$  - усулини қўллаб ечинг.

а)

$b_i \backslash a_j$	60	60	40	90
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
40	6	7	8	9
90	9	6	5	4

б)

$b_i \backslash a_j$	120	90	45	45
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

в)

$b_i \backslash a_j$	35	25	20
20	5	2	3

30	3	5	2
20	2	5	3

г)

$b_i \backslash a_j$	60	60	60
50	2	4	3
40	4	3	2
110	3	2	4

Жавоблар:

$$1. X = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}; F_{\min} = 790. \quad 2. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; F_{\min} = 780.$$

$$3. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; F_{\min} = 720. \quad 4. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 35 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}; F_{\min} = 800.$$

## 12- машғулот

### Бутун сонли чизиқли программалаш масалалари.

Кўп ҳолларда чизиқли программалаш масалаларида ўзгарувчилардан бутун бўлишлилик шарти талаб қилинади. Агар ўзгарувчиларнинг ҳаммаси бутун бўлишлиги талаб қилинса, у ҳолда тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласи деб аталувчи масала ҳосил бўлади. Бу масалани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_j, \quad i=1,2,3,\dots,m; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3,\dots,n; \quad (3)$$

$$x_j \in Z, \quad j=1,2,3,\dots,n; \quad (4)$$

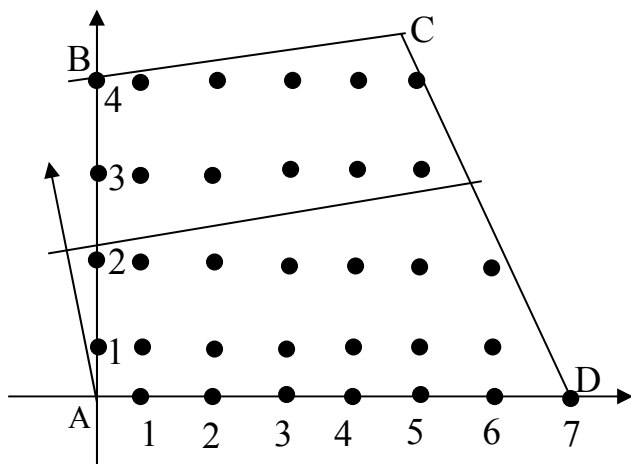
Бунда  $Z$  - бутун сонлар тўплами.

(1)-(4) масаланинг мумкин бўлган ечимлар тўплами  $\tilde{K}$  координаталари бутун сонлар бўлган нуқталар тўпламидан ташкил топади.  $\tilde{K}$  тўплам (1)-(3) чизиқли программалаш масаласининг мумкин бўлган ечимлар тўплами  $K$  нинг қисми, яъни  $\tilde{K} \subset K$  эканлигини эътиборга олсак, икки ўзгарувчи тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласини график усулида ечиш мумкин бўлади.

1-мисол.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 29 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = x_1 - 20x_2 \rightarrow \min$$

Ечиш:  $R^2$  текисликда берилган масаланинг ўзгарувчиларини бутун бўлиши шартига эътибор бермасдан, берилган масалани оддий чизиқли программалаш масаласи деб,  $K$  мумкин бўлган ечимлар тўпланини тузиб,  $K$  даги координаталари бутун сон бўлган нуқталарни белгилаймиз. Бу нуқталар тўплами тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласининг  $\tilde{K}$  мумкин бўлган ечимлар тўпланини ташкил қилади.



12.1.- чизма.

$F(x)$  функциянинг сатҳ чизиғини  $F(x)$  ни камайиш йўналиши  $-\nabla F=(-1; 20)$  бўйича силжитиб, сатҳ чизиғи ва  $\tilde{K}$  тўпلام кесишмаси бўш тўпلام бўлмаслиги шартида шу чизикнинг энг четки ҳолини топамиз. Сатҳ чизиғини бундай ҳоли  $B(0; 4)$  нуқтада бўлади. Шу сабабдан берилган масаланинг ечими  $\tilde{X}=(0; 4)$  бўлади ва  $F_{\min}=F(\tilde{X})=-80$ .

12.1 чизмадан кўриниб турибдики, берилган масаланинг оддий чизикли программалаш масаласи сифатида қаралган ҳолидаги ечими  $X=(5; 4,5)$  бўлади ва  $F_{\min}=F(X)=-85$ .

Бундан шундай хулоса чиқариш мумкин:

Умуман олганда, мақсад функциянинг  $\tilde{K}$  тўпلامдаги минимум нуқтаси оддий чизикли программалаш масаласининг ечимига яқин бўлган координатлари бутун сонли нуқта билан бир нарса эмас.

Ўзгарувчилари сони исталганча бўлган бутун сонли чизикли программалаш масаласини ечишда Гомори усулидан фойдаланилади. Гомори усули (1)-(3) оддий чизикли программалаш масаласини (4) шартига эътибор бермаган ҳолда мумкин бўлган ечимлар тўплами  $K$  дан координатлари бутун сон бўлмаган нуқталардан иборат қисмини биринкетин кесишдан иборатдир. Бу «кесувчи тенглама» деб аталувчи қўшимча тенглама ёрдамида амалга оширилади.

Гомори усулининг алгоритмини келтирамиз.

1. Берилган бутун сонли чизикли программалаш масаласини ўзгарувчиларининг бутун бўлишлилик (4) шартига эътибор бермасдан, уни (1)-(3) оддий чизикли программалаш масаласи сифатида симплекс усул ёрдамида ечамиз. Агар топилган ечим  $X$  учун (4) шарт бажарилса, у ҳолда  $X$  берилган масаланинг ҳам ечими бўлади, акс ҳолда симплекс-жадвални  $A_0$  устунида жойлашган ечим  $X$  ни аниқловчи  $\beta_i$  сонлар ичида  $\{\beta_i\} > 0$  шартни қаноатлантирувчи сонлар мавжуд бўлади.

Эслатма. Ихтиёрий  $a \in R^1$  сонни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a = [a] + \{a\},$$

бунда  $[a]$  - берилган  $a$  сонни бутун қисми ва  $\{a\} = a - [a]$  - унинг каср қисми.

$$\text{Масалан, } \left[ \frac{7}{3} \right] = 2, \quad \left[ -\frac{7}{3} \right] = -3,$$

$$\left\{ \frac{7}{3} \right\} = \frac{7}{3} - \left[ \frac{7}{3} \right] = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}; \quad \left\{ -\frac{7}{3} \right\} = -\frac{7}{3} - \left[ -\frac{7}{3} \right] = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3};$$

2. Бутун бўлмаган  $\beta_i$  лар ичидан биттасини, масалан,  $\beta_r$  ни  $\{\beta_r\} = \max\{\beta_i\}$  шарт асосида танланади. Симплекс-жадвални  $r$  – сатри бўйича қуйидаги кўринишдаги

$$\sum_{j=m+1}^n \{q_{rj}\} x_j \leq -\{\beta_r\}$$

қўшимча шарт тузилади. Бу қўшимча шарт  $x_{n+1} \geq 0$  қўшимча ўзгарувчи ёрдамида қуйидаги

$$-\sum_{j=m+1}^n \{q_{rj}\} x_j + x_{n+1} = -\{\beta_r\}$$

«кесувчи» тенглама тузилади ва уни қўшимча сатр сифатида симплекс-жадвалга киритилади. Энди симплекс-жадвал чизиқли программалаш масаласини базис ечимини тасвирлай олмайди, чунки  $A_0$  устунда  $-\{\beta_r\} < 0$  пайдо бўлади.

3. Мумкин бўлган базис ечимга ўтиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак бўлади:

а) манфий  $\beta_k$  озод ҳадли сатр «ҳал қилувчи» сатр ҳисобланади.

(Равшанки, биринчи қадамда  $k=n+1$  бўлади);

б) агар барча коэффициентлар  $q_{kj} > 0$  бўлса, масала ечимга эга бўлмайди. Акс ҳолда «ҳал қилувчи» устуннинг  $\ell$  номери қуйидаги

$$\frac{\Delta_\ell}{|q_{k\ell}|} = \min_{j: q_{kj} < 0} \frac{\Delta_j}{|q_{kj}|}$$

шартдан аниқланади;

в)  $q_{kj}$  «ҳал қилувчи» элемент асосида симплекс-жадвални ўзгартирамиз.

4. Агар 3- қадамда топилган чизиқли программалаш масаласини ечими бутун бўлишлик шарти, яъни (4)- шарт бажарилса ҳисоблаш тўхтатилади, акс ҳолда 2- қадамга ўтиб, ҳисоблаш юқорида баён этилган қадамлар бўйича давом эттирилади.

Бу алгоритм асосида тўла бутун сонли чизиқли программалаш ечими топилади ёки унинг ечими мавжуд эмаслиги аниқланади.

2- мисол. 1- мисолда қаралган масалани Гомори усули билан ечинг.

Ечиш:  $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  қўшимча ўзгарувчиларни киритиб бу масалани каноник кўринишда ёзамиз.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \rightarrow \min$$

Чегаравий шартларнинг барча коэффициентлари бутун сонлардир. Шу сабабдан  $x_1, x_2$  ўзгарувчиларнинг бутунлиги  $x_3, x_4$  ўзгарувчиларнинг бутун бўлишлигига олиб келади. Шу сабабдан каноник кўринишга келтирилган масалани тўла бутун сонли чизикли программалаш масаласи сифатида қараш мумкин. Гомори усулидан фойдаланамиз.

Масалани олдин симплекс усули ёрдамида ечамиз.

Б	C <sub>б</sub>	A <sub>0</sub>	1	-20	0	0
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
A <sub>3</sub>	0	40	-1	10	1	0
A <sub>4</sub>	0	29	4	2	0	1
Δ <sub>j</sub>		0	-1	20	0	0
A <sub>2</sub>	-20	4	-1/10	1	1/10	0
A <sub>4</sub>	0	21	21/5	0	-1/5	1
Δ <sub>j</sub>		-80	2	0	-2	0
A <sub>2</sub>	-20	9/2	0	1	2/21	1/42
A <sub>1</sub>	1	5	1	0	-1/21	5/21
Δ <sub>j</sub>		-85	0	0	-41/21	-5/21

$X_{opt} = (5; 9/2; 0; 0)$   $F_{min} = -85$  бутун бўлишлик шартини қаноатлантирмайди. Шу сабабдан охириги симплекс жадвалга қўшимча сатр киритамиз:

$$\{\beta_1\} = \frac{9}{2} - \left[ \frac{9}{2} \right] = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}; \quad q_{11} = q_{12} = 0 \quad q_{13} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21}$$

$$q_{14} = \frac{1}{42} - 0 = \frac{1}{42}$$

Ундан кейин алгоритмда тасвирланган қоида бўйича симплекс-жадвални ўзгартирамиз.

Б	C <sub>б</sub>	A <sub>0</sub>	1	-20	0	0	0
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>2</sub>	-20	9/2	0	1	2/21	1/42	0
A <sub>1</sub>	1	5	1	0	-1/21	5/21	0
Δ <sub>j</sub>		-85	0	0	-41/21	-5/21	0
A <sub>5</sub>	0	-1/2	0	0	-2/21	-1/42	1
A <sub>2</sub>	-20	4	0	1	0	0	1
A <sub>1</sub>	1	0	1	0	-1	0	10
A <sub>4</sub>	0	21	0	0	4	1	-42
Δ <sub>j</sub>		-80	0	0	-1	0	-10

Охириги симплекс-жадвал берилган масаланинг ечимини  $\tilde{X}_{opt} = (0; 4)$   $\tilde{F}_{min} = F(\tilde{X}) = -80$  беради.

Қайд қилиб ўтамизки, симплекс жадвалга киритилган қўшимча шартнинг кесувчи тенглама кўриниши қуйдагича

$$-\frac{1}{42}x_4 - \frac{4}{42}x_3 \leq -\frac{1}{2}$$

бўлади. Бу шартни  $x_3 = 40 + x_1 - 10x_2$ ,  $x_4 = 29 - 4x_1 - 2x_2$  тенгламалар ёрдамида  $x_1$  ва  $x_2$  ўзгарувчиларга ўтказиб оламиз:  $x_2 \leq 4$ . Бундан кўришиб турибдики қўшимча шарт  $K$

тўпландан (12.1 чизмадаги ABCD кўпбурчакдан)  $X=(5; 9/2)$  нуқтани ўз ичига олувчи қисмини кесиб ташлайди.

Эслатиб ўтамизки, шартлари тенгсизлик

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (5)$$

билан берилган тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласидан каноник кўринишга ўтишда, умуман олганда, тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласи ҳосил бўлмайди, чунки  $x_{n+1}$  қўшимча ўзгарувчилар бутун бўлиш шартига бўйсунмайди.

Аммо (5) да барча  $a_{ij}$  ва  $b_i$  лар бутун сонлар бўлган ҳолда бутун бўлишлик шартини  $x_{n+1}$  ларга ҳам тарқатиш мумкин экан.

Агар (5)  $a_{ij}$  ва  $b_i$  лар рационал сонлар бўлганда ҳам каноник кўринишга ўтишда тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласини ҳосил қиламиз. Бунинг учун (5) ни  $a_{ij}$  ва  $b_i$  лар махражларининг энг кичик умумий карралисига кўпайтириб фақат шундан сўнг  $x_{n+1}$  қўшимча ўзгарувчиларни киритиш керак экан.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

Тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласини график усул билан ечинг.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ x_1 \leq 13 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{J} : \tilde{X} = (13; 3), \tilde{F}_{\min} = -16$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$2. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{J} : \tilde{X} = (1; 2), \tilde{F}_{\min} = -31$$

$$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{J} : \text{Иккита}$$

$$\text{ечим} : \tilde{X} = (2; 0), \tilde{X} = (1; 1), \tilde{F}_{\min} = -2$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{J} : \tilde{X} = (2; 1), \tilde{F}_{\min} = -11$$

$$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$



$$5. \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 19), \tilde{F}_{\min} = 19$$

$$F(x) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$6. \begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (2; 6), \tilde{F}_{\min} = 52$$

$$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

$$7. \begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 0; 1; 2), \tilde{F}_{\min} = -1$$

$$F(x) = x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (1; 9; 0; 5), \tilde{F}_{\min} = -9$$

$$F(x) = -x_2 \rightarrow \min$$

Куйидаги тўла бутун сонли чизиқли программалаш масалаларини Гомори усули билан ечинг.

$$9. \begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 4; 0; 1; 0), \tilde{F}_{\min} = 1$$

$$F(x) = -x_1 + x_4 \rightarrow \min$$

$$10. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 0; 1; 1; 3; 1), \tilde{F}_{\min} = -24$$

$$F(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

$$11. \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (3; 2; 2; 1), \tilde{F}_{\min} = -2$$

$$F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 3; 2; 0), \tilde{X} = (1; 2; 1; 1), \\ \tilde{X} = (2; 1; 0; 2), \tilde{F}_{\min} = -3$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$13. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (1; 3; 0; 0; 1), \tilde{F}_{\min} = 8$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \rightarrow \min$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (2; 1; 1; 1), \tilde{F}_{\min} = -11$$

$$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (2; 1; 2; 1), \tilde{F}_{\min} = -3$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$16. \begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (1; 3; 5; 3), \tilde{F}_{\min} = -5$$

$$F(x) = -x_3 \rightarrow \min$$

$$17. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (3; 1; 2; 3; 3), \tilde{F}_{\max} = 19$$

$$F(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$18. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 14 \\ 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (1; 2; 3), \tilde{F}_{\min} = 10$$

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 18 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (6; 1; 4), \tilde{F}_{\min} = -17$$

$$F(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 44 \\ x_1 \leq 22 \\ x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (6; 18), \tilde{F}_{\min} = -78$$

$$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$21. \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 1; 1), \tilde{F}_{\min} = 3$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$22. \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq \frac{25}{6} \\ x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \leq 3 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\mathcal{K} : \tilde{X} = (0; 0; 7), \tilde{F}_{\min} = -21$$

**13- машғулот**  
**Чизиксиз программалаш масаласини**  
**геометрик**  
**талқинидан фойдаланиб ечиш.**

Фараз қилайлик, чизиксиз программалаш масаласи қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad (i=m+1, m+2, \dots, n) \quad (2)$$

$$Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (3)$$

Бу ерда (1) ва (2) муносабатлар чегаравий шартлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг номанфийлик шартини ҳам ўз ичига олади.

Ушбу масаланинг оптимал ечимини геометрик талқиндан фойдаланиб топиш учун қуйидаги ишларни амалга ошириш керак.

1. Масаланинг (1) ва (2) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини, яъни мумкин бўлган режалар тўпламини яшаш керак.

2.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q$  (Q-ихтиёрий ўзгармас катта сон).

3. Q нинг қийматини ўзгартириб (камайтириб) бориб, энг паст сатҳли гиперсирт топилади ёки функциянинг қуйидан чегараланмаганлиги аниқланади.

4. Мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст сатҳли гиперсирт билан кесилган нуқтаси аниқланади ва f функциянинг бу нуқтадаги қиймати топилади.

ёуйидаги масалани геометрик талқиндан фойдаланиб ечамиз.

Мисол.  $x_1 x_2 \leq 4$

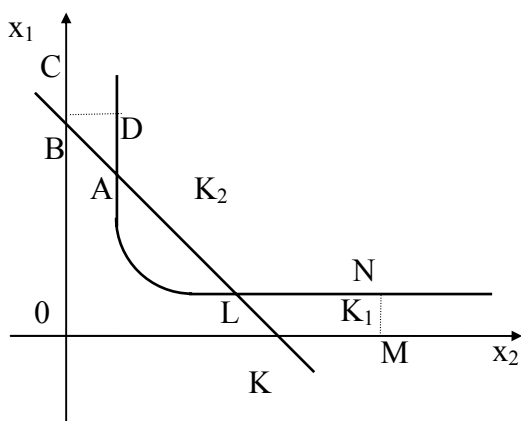
$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

$$Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max(\min)$$



13.1 - чизма.

Ечилиши: Бу масаланинг мумкин бўлган режалар тўплами каварик тўплам бўлмайди, аксинча, иккита айрим  $K_1$  ва  $K_2$  қисмлардан иборат бўлади (13.1-чизма). Мақсад функция ўзининг минимал қиймати  $Z=17$  га  $A(1;4)$  ва  $L(4;1)$  нуқталарда эришади.  $D(\frac{2}{3};6)$  ва  $N(7; \frac{4}{7})$  нуқталарда эса функция локал максимум қийматларга эришади.

$$Z(D)=\frac{328}{9}, \quad Z(N)=\frac{2417}{49}$$

Локал максимум қийматларни таққослаш  $Z$  функция  $N$  нуқтада глобал максимумга эришишини кўрсатади.  $D$  ва  $N$  нуқталарнинг координаталари ва улардаги  $Z$  функциянинг қиймати қуйидагича топилади:  $D(x_1^*; x_2^*)$  нуқта  $x_2=6$  ва  $x_2=4/x_1$  эгри чизикда ётгани учун унинг координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_2^* = \frac{4}{x_1^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases} \quad Z^* = x_1^{*2} + x_2^{*2} \quad Z^* = \frac{328}{9} = Z(D)$$

Худди шунингдек,  $N$  нуқта  $x_1=7$  тўғри чизик ва  $x_2=4/x_1$  эгри чизикнинг кесишган нуқтаси бўлиши учун унинг  $x_1^0, x_2^0$  координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \frac{4}{7} \\ Z^0 = x_1^{02} + x_2^{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \frac{4}{7} \\ Z^0 = \frac{2417}{49} \end{cases}$$

### Мустақил бажариш учун мисоллар.

График усулидан фойдаланиб, қуйидаги чизиқсиз программалаш масалаларини ечинг:

$$1. \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 6 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 11 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\text{Ж: } \min Z = \frac{64}{3}; \quad X\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

$$\max Z = 134; \quad X(0; 6).$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{Ж: } \max Z = 0; \quad X(3; 3)$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\text{Ж: } \min Z = 0; \quad X(2; 2).$$

$$\max Z = 66; \quad X(0; 7).$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\text{Ж: } \min Z = 2,5; \quad X(4,5; 1,5).$$

$$\max Z = 40; \quad X(0; 4).$$

$$5. \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \geq -2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 6 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 \leq 2 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max$$

$$\text{Ж: } \max Z = 100; \quad X(0; 2).$$

$$6. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\cdot Z = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{Ж: } \max Z=24; \text{ X}(6;4).$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z=9(x_1-5)^2+4(x_2-6)^2 \rightarrow \min$$

$$\text{Ж: } \min Z=16; \text{ X}(5;4).$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\text{Ж: } \max Z=65; \text{ X}(2;12).$$

$$\min Z = \frac{324}{101}; \text{ X}\left(\frac{123}{101}; \frac{422}{101}\right).$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\text{Ж: } \min Z=0 \quad \text{X}(4;3)$$

$$\max Z=137,25 \quad \text{X}(13;10,5)$$

$$10. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \rightarrow \min$$

$$\text{Ж: } \max Z=45; \text{ X}(1,0) \text{ (глобал max).}$$

$$\max Z=40; \text{ X}=(6,0) \text{ (локал max).}$$



**14- машғулот**  
**Шартлари тенгликлардан иборат бўлган**  
**шартли экстремум масаласи.**  
**Лагранж кўпайтувчилари усули.**  
**Кун-Таккер теоремасидан фойдаланиб**  
**чизиксиз (қавариқ) программалаш масаласини ечиш.**

$$1. \text{ Дейлик, } G_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (2)$$

кўринишидаги масалани ечиш талаб қилинган бўлсин, яъни (1) шартларни қаноатлантирувчи ва  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциясига максимум (минимум) қиймат берувчи  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нуқтани топиш керак бўлсин.

$G_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялар ва уларнинг ҳамма  $x_1, x_2, \dots, x_n$  номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалар узлуксиз деб фараз қилайлик. Агар номаълумларга номанфийлик шarti қўйилмаганда масалани Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули билан ечиш мумкин.

Бунинг учун:

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda(b - G(X)), \quad (3)$$

яъни

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - G_i(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

(4)

функцияни тузамиз. Бу функция Лагранж функцияси деб аталади.

Лагранж функциясидан  $x_j (j = \overline{1, n})$  ва  $\lambda_i (i = \overline{1, m})$  номаълумлар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(X, \Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g(X)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial F(X, \Lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - G_i(X) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ушбу система Лагранж функциясининг локал экстремуми мавжудлигининг зарурий шартидан иборат. Агар  $f(x)$  функция  $X^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда  $\Lambda^0(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$  вектор мавжуд бўладики, унинг учун  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$  нуқта юқоридаги (5) системасининг ечими бўлади.

Мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб қуйидаги чизиксиз программалаш масаласини ечинг.

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Ечиш: Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Бу функциядан  $x_1, x_2$  ва  $\lambda$  бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0 \quad 2\lambda x_1 = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda x_2 = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Системани ечиб куйидагини топамиз:

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \lambda_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Жавоб: } X_{\text{onm}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) Z_{\text{max}} = 1$$

2. Фараз қилайлик, куйидаги чизиксиз (кавариқ) программалаш масаласи берилган бўлсин.

$$G_i(X) = G_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, \quad (i=1, \dots, m) \quad (1)$$

$$x_i \geq 0, (j=1, \dots, n) \quad (2)$$

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \quad (3)$$

Агар камида битта  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нуқтадан  $G_i(x_1, x_2, \dots, x_n) > b_i, (i=1, \dots, m)$  тенгсизлик ўринли бўлса, бунга Слейтер шарти дейилади. Кун-Таккернинг куйидаги теоремаси ўринли бўлади:

Теорема.  $X^0 \geq 0$  нуқта (1)-(3) масаланинг оптимал ечими бўлиши учун бу нуқтада

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \leq 0 \dots \quad (4)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, x_j^0 \geq 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_j} \geq 0 \dots \quad (6)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \lambda_i^0 \geq 0 \quad (7)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу ерда  $F(X, \Lambda)$  - Лагранж функцияси,  $\Lambda$  - Лагранж кўпайтувчилари.

Агар қавариқ программалаш масаласи

$$q_i(x) = q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (10)$$

кўринишда бўлса, у ҳолда  $X^0$  нуқта бу масалани ечими бўлишининг зарурий ва етарлилик шартлари куйидагидан иборат бўлади.

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \geq 0 \quad (11)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, x_j^0 \geq 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_j} \leq 0 \quad (13)$$

$$\lambda_j \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_j} = 0, \lambda_j^0 \geq 0 \quad (14)$$

Юқоридаги (4)-(7), (11)-(14) шартлар каварик программалаш масаласининг экстремуми мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шартларидан иборат.

1-мисол.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 8 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 6 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(\lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \rightarrow \max$$

Масалани график усулда ечинг ва топилган ечим учун Кун-Таккер шартлари ўринли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Масалани графиги усулда ечиб,  $X^0(0,8;0,4)$  ва  $f(0,8;0,4) = 0,8$  эканлигини аниқлаймиз.

Энди шундай  $\Lambda^0$  мавжуд бўлиб,  $(X^0, \Lambda^0)$  да Кун-Таккер шартларининг бажарилишини кўрсатамиз.

Берилган масала учун Лагранж функциясини тузамиз.

$$f(X, \Lambda) = \lambda_0(-x_1^2 - x_2^2) + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3(6 - x_1 - x_2)$$

$X^0$  нуқтада масаланинг 2-тенгсизлиги учун Слейтер шarti бажарилади. Бу ҳолда масала нормал бўлиб,  $\lambda_0 = 1$  деб қабул қилинади.

Лагранж функциясидан  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  лар бўйича хусусий ҳосилалар оламиз.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -2\lambda_1 + 2\lambda_1 - \lambda_3; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = -2\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2 \cdot 0,8 - 0,4 = 6 > 0$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_3} = 6 - 0,8 - 0,4 = 4,8 > 0$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0$$

шартга кўра  $\lambda_2$  ва  $\lambda_3$  ларнинг қийматлари нолга тенг.

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot 0,8 + 0,4 - 2 = 0$$

тенглик бажарилганлиги учун  $\lambda_1$  нолга тенг бўлмаган қийматни қабул қилиши ҳам мумкин.

$$\lambda_j^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{ва}$$

$$x_j^0 \geq 0 \quad \text{дан}$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial_j} = 0; \quad (j=1,2)$$

бўлиши керак, яъни

$$-2 \cdot 0,8 + 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$-2 \cdot 0,4 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0,8 \quad \text{ва} \quad \lambda = (0,8; 0; 0)$$

$$\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

Демак,  $(X_0, \Lambda_0) = (0,8; 0,4; 0,8; 0; 0)$  нуктада ҳақиқатдан ҳам, Кун-Таккер шартлари бажарилаяпти, яъни у эгар нукта бўлаяпти.

2-мисол. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб  $X_0 = (0; 1)$  нукта куйдаги чизиқсиз программалаш масаласининг ечими эканлигини кўрсатинг.

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 8 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 4 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2^2 \rightarrow \min$$

Ечиш  $X^0(1; 0)$  нуктада чегаравий шартлар қатъий тенгсизликка айланади, демак Слейтер шarti бажарилади. Бу ҳолда  $\lambda_0 = 1$  деб қабул қилиш мумкин, у ҳолда Лагранж функцияси куйидаги кўринишда бўлади.

$$F(x_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2^2 + \lambda_1(4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 8) + \lambda_2(2\lambda_1 + \lambda_2 - 4)$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,$$

Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текшираимиз.

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial_1} = (2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2)_{x^0} \geq 0$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial_2} = (6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2)_{x^0} \geq 0$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_1} = (4x_1 + 5x_2 - 8)_{x^0} = -4 < 0,$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_1} \cdot \lambda_1^0 = 0 \Rightarrow \lambda_1^0 = 0.$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_1 + \lambda_2 - 4 = -2 < 0,$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_2} \cdot \lambda_2^0 = 0 \Rightarrow \lambda_2^0 = 0$$

бундан кўринадики  $(X^0, \Lambda^0) = (1; 0; 0; 0)$  нукта Кун-Таккер шартларини қаноатлантиради. Демак, у Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлади. Шунинг учун  $X^0(1; 0)$  нукта берилган масаланинг ечими бўлади.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

1.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 180$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$Z = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

$$\bar{b}: x_1 = 91; x_2 = 89; Z_{\min} = 17278$$

2.

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\bar{b}: \lambda_1 = \frac{5}{2}; \lambda_2 = \frac{5}{2}; \quad Z_{\min} = \frac{25}{2}.$$

3.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - 3x_2 = 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \rightarrow \min(\max)$$

$$\bar{b}: \lambda_1 = \frac{27}{8}; \lambda_2 = -\frac{7}{4}; \lambda_3 = \frac{19}{8}; \quad Z_{\min} = 16\frac{53}{64}$$

4.

$$2x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 = 12$$

$$2x_1 - x_2 = 8$$

$$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \rightarrow \min(\max).$$

$$\bar{b}: X = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{28}{39}\right); \quad Z_{\min} = -\frac{56}{27}.$$

5.

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

$$Z = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \rightarrow \min(\max)$$

$$\bar{b} : X = (2;2;2) \cdot Z_{\max} = 8$$

6.

$$x_1^2 + x_2^2 = 19$$

$$x_1 + 2x_2 \cdot x_3 = 11$$

$$Z = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 \cdot x_3 \rightarrow \min(\max).$$

$$\bar{b} : X_1 = (-1;3;2) \cdot Z_{\min} = 43.$$

$$X_2 = (-1;-3;-2).$$

7

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 8$$

$$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \rightarrow \min(\max)$$

$$\bar{b} : X_1 = (2;2;1), X_2 = (2;1;2), X_3 = (1;2;2), Z_{\min} = 4$$

$$2). x_1 = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right) \cdot x_3 = \left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right) \cdot x_3 = \left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \cdot Z_{\max} = \frac{112}{27}$$

8.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18$$

$$Z = x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3^4 \rightarrow \max$$

$$\bar{b} : X = (4;6;8) \cdot Z_{\max} = 14155776$$

9. Иккита корхонада 200 бирлик маълум маҳсулот ишлаб чиқариш режалаштирилган. I корхонада ишлаб чиқиладиган  $x_1$  миқдордаги маҳсулотга  $4x_1^2$  миқдорда, II корхонада  $x_2$  миқдордаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун эса  $20x_2 + 6x_2^2$  миқдорда харажат сарф қилинади. 2ар бир корхонада қанчадан миқдорда маҳсулот ишлаб чиқарилганда умумий харажатлар миқдори энг кам бўлади?

$$Ж: X = (121;79)$$

10. Корхонада иккита технология асосида маҳсулот ишлаб чиқарилади. Биринчи технология бўйича ишлаб чиқариладиган  $x_2$  миқдордаги маҳсулотга  $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$  миқдорда, иккинчи технология асосида ишлаб чиқариладиган  $x_2$  миқдордаги маҳсулотга  $b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$  миқдордаги харажат қилинади. Корхонада d бирлик маҳсулот ишлаб чиқариши кераклигини назарда тутиб, ҳар бир технология бўйича қанча маҳсулот ишлаб чиқарилганда сарф қилинган умумий харажатлар миқдори минимал бўлади?

11. ёуйдаги масала учун  $X^0=(0;1)$  нуқта ечим бўлишини Кун-Теккер шартлари орқали аниқланг.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \\ 8\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq 2 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2 \rightarrow \max$$

12. ёуйидаги масала учун  $X^0 = (3; 4)$  нукта ечим бўлишини Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб аниқланг.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \rightarrow \max$$

13. Масалани график усулда ечинг ва топилган ечим Кун-Таккер шартларини қаноатлантиришини аниқланг.

$$\bar{\sigma} : X^0 = \left( \frac{123}{101}; \frac{422}{101} \right) \cdot Z_{\min} = \frac{324}{101}$$

14. Масалани график усулда ечиб, ечим учун Кун-Таккер шартларини бажарилишини аниқланг.

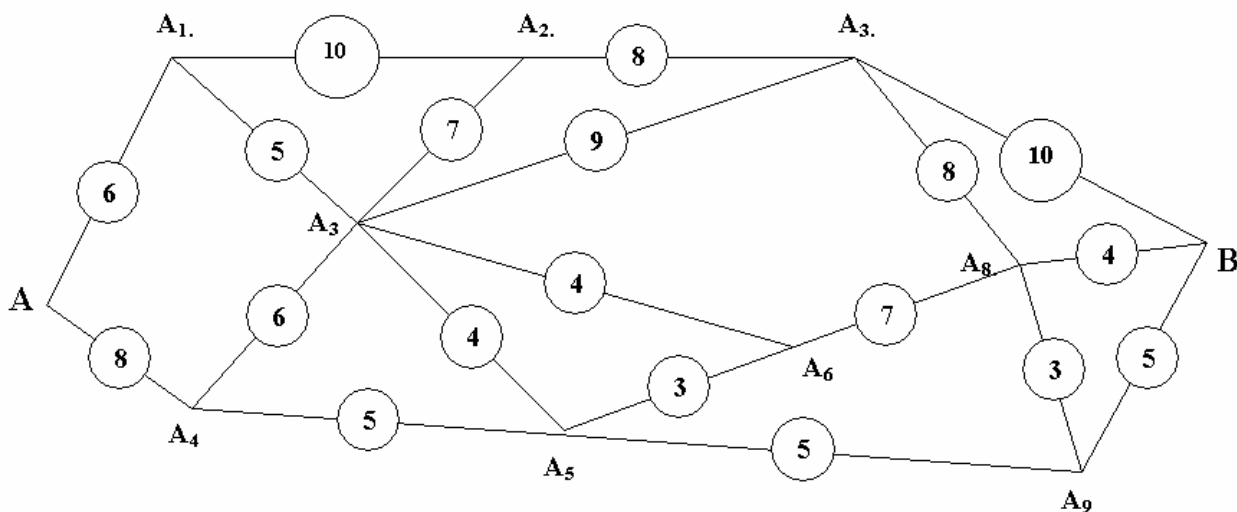
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \max$$

**15- машғулот**  
**Кўп босқичли иқтисодий масалаларни**  
**динамик программалаш усуллари билан ечиш.**

**1. Дайди савдогар масаласи (энг қисқа йўлни танлаш масаласи).**

Фараз қилайлик, А ва В пунктларни ўзаро боғловчи темир йўллар тўри берилган бўлсин (15.1-шакл). Бу пунктлар орасида темир йўл билан боғланган жуда кўп пунктлар мавжуд бўлиши мумкин. Бунда ҳар қандай икки пункт орасидаги масофа маълум деб фараз қиламиз. Масалан, бу масофанинг узунлиги 1-шаклдаги ҳар икки нуктани туташтирувчи кесма устига ёзилган сонлардан иборат бўлсин. А ва В пунктларни энг қисқа йўл билан туташтирувчи маршрутни аниқлаш масаласи қўйилади.



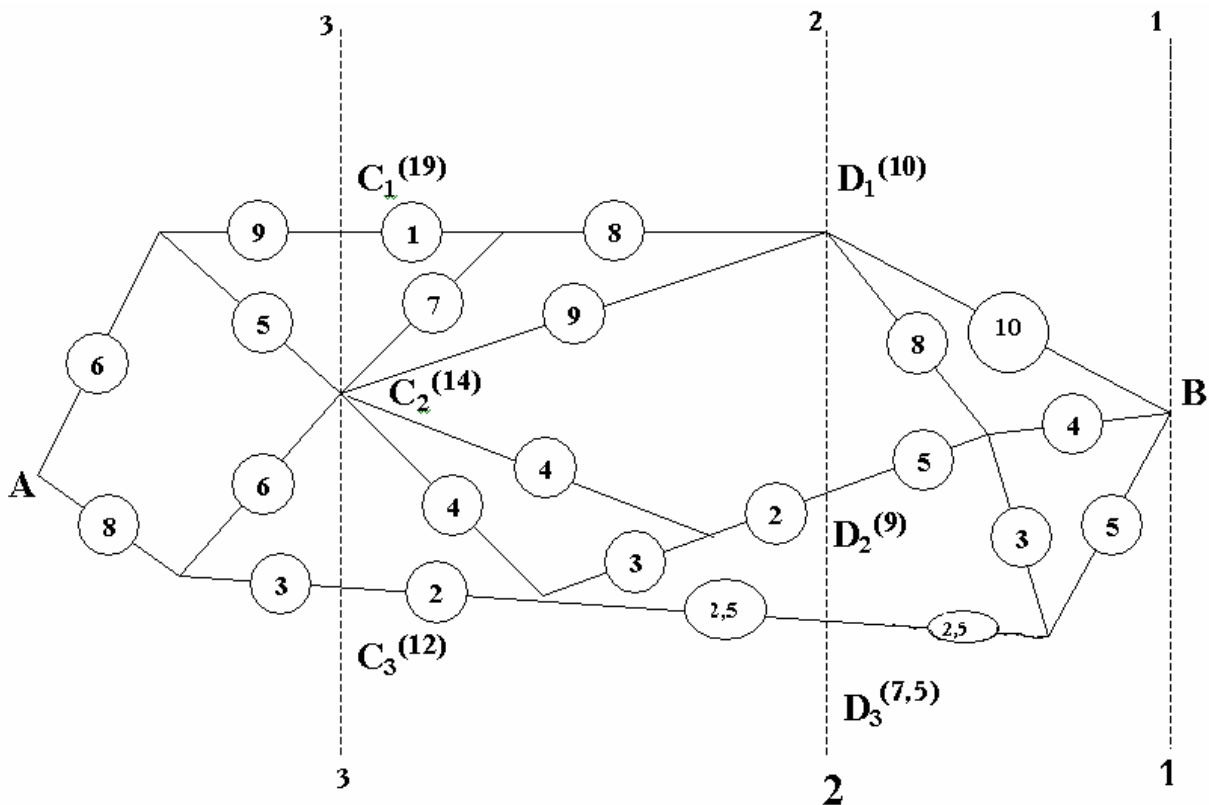
15.1.- шакл.

Масалани ечиш учун (1-1), (2-2), (3-3) чизиқлар ёрдамида берилган темир йўллар тўрини айрим қисмларга (босқичларга) ажратамиз (2-шакл).

(2-2) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган нукталарини  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  лар билан, (3-3) чизиқнинг кесишган нукталарини эса  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  лар билан белгилаймиз. Биринчи қадамда В нуктадан  $D_1$ ,  $D_2$  ва  $D_3$  нукталаргача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} B - D_1 &: \min (10, 8+4, 5+3+8)=10, \\ B - D_2 &: \min (10+8+5, 4+5, 5+3+5)=9, \\ B - D_3 &: \min (5+2,5, 4+3+2,5)=7,5. \end{aligned}$$





15.2. – шакл.

2-шаклда  $D_1, D_2, D_3$  нукталардан сўнгги В пунктгача бўлган энг қисқа масофа қавс ичида ёзилган. Сўнгга (3-3) чизикнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган  $C_1, C_2, C_3$  ларни кўрамиз. Бу нукталардан В нуктагача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз. Бу масофа

$$C_1 \text{ нукта учун } \min(1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+2+3+2+9, 1+7+2+2,5+7,5) = \min(19, 23, 24, 20) = 19.$$

$$C_2 \text{ нукта учун } \min(7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9, 4+2,5+7,5) = \min(25, 19, 15, 16, 14) = 14.$$

$$C_3 \text{ нукта учун } \min(2+2,5+7,5, 2+3+2+9) = 12.$$

Бу масофалар шаклда қавс ичида ёзилган. 3 босқичда А нуктадан В гача бўлган энг қисқа масофа топилади. Бу масофа қуйидагича аниқланади:

$$\min(6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12) = 23$$

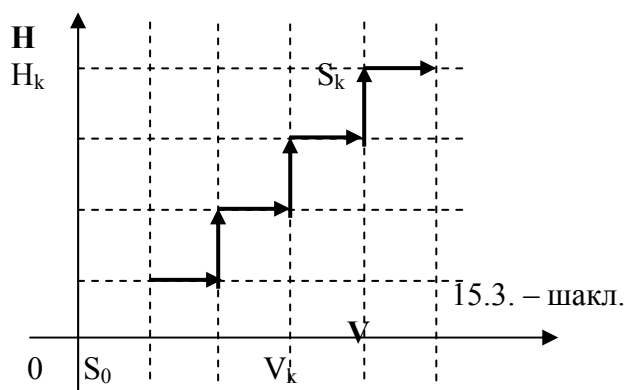
Сўнгга А нуктадан энг қисқа масофа бўйлаб В нуктага борадиган йўлни белгилаймиз.

## 2. Самолётнинг учиш баландлиги ва тезлигини оширишда сарф қиладиган ёқилғи миқдорини минималлаштириш масаласи.

Самолёт дастлаб  $H_0$  баландликда  $V_0$  тезлик билан учаётган бўлсин. Унинг учиш баландлигини  $H_k$  ва тезлигини  $V_k$  гача кўтариш керак бўлсин. Демак, самолётнинг учиш баландлигини  $H_0$  дан  $H_k$  гача, тезлигини эса  $V_0$  дан  $V_k$  гача оширишда сарф қиладиган ёқилғи миқдорини минималлаштириш масаласини ҳал қилиш талаб этилади. Бунда аниқ бир тезлик билан учаётган самолётнинг  $H_1$  баландликдан  $H_2 > H_1$  баландликкача

кўтарилиши учун ҳамда аниқ бир баландликда учаётган самолётнинг тезлигини  $V_1$  дан  $V_2 > V_1$  гача кўтариш учун сарф қилинадиган ёқилғи миқдорлари маълум деб қаралади. Ушбу масала динамик программалаш масаласи сифатида қуйидагича тавсифланади: Самолётнинг учиш баландлиги ва тезлиги кўрсаткичлари тўпламини шундай бошқариш керакки, натижада сарф қилинган ёқилғи миқдори минимал бўлсин.

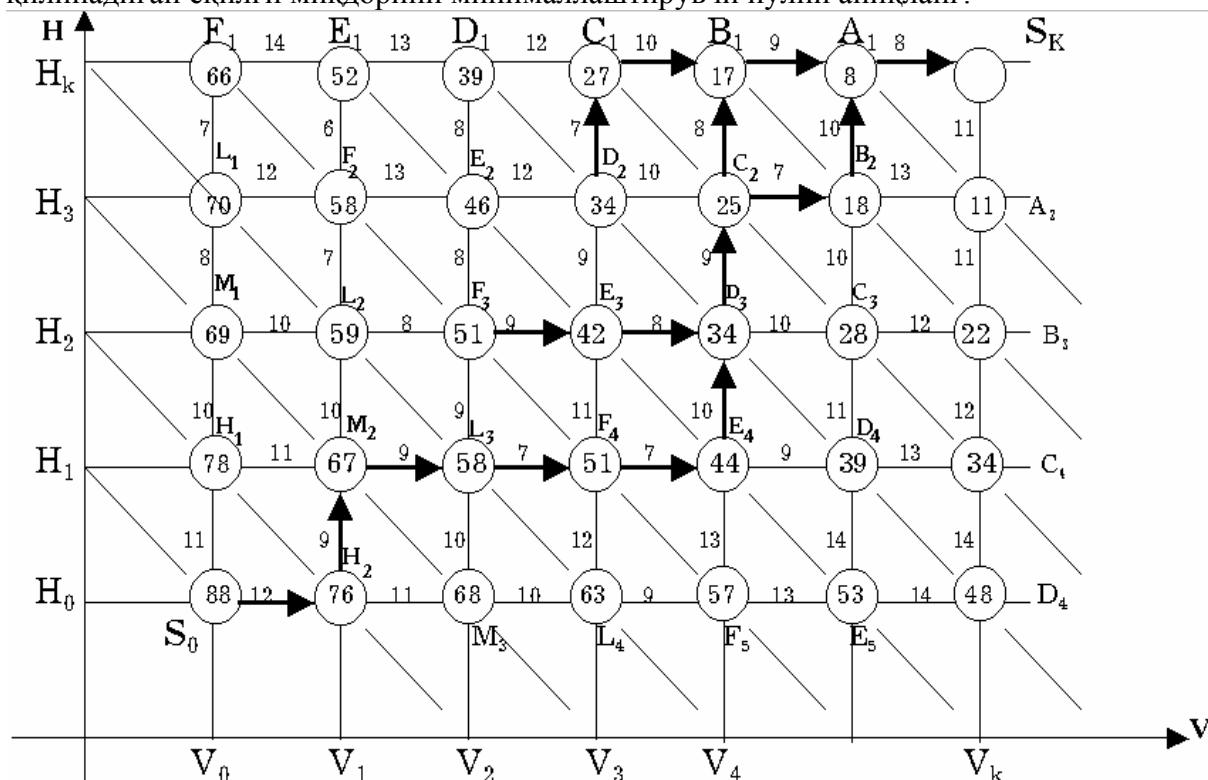
**Ечиш.** Самолётнинг фазодаги ҳолати иккита параметр – тезлик ( $V$ ) ва баландлик ( $H$ ) билан аниқланади. Шунинг учун ечимни  $VON$  текисликда кидирамиз. Аниқроғи, шу текисликдаги  $H=H_0$ ,  $H=H_k$  ва  $V=V_0$ ,  $V=V_k$  тўғри чизиклар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка қараймиз. Самолётни  $S_0 (V_0, H_0)$  ҳолатдан  $S_k (V_k, H_k)$  ҳолатга, энг кам харажат қилиб, ўтказиш масаласи қўйилади. Бу масалани динамик программалаш усуллари билан ечиш учун  $(H_k - H_0)$  кесмани  $n_1$  та тенг кесмачаларга,  $(V_k - V_0)$  кесмани эса  $n_2$  та тенг кесмачаларга бўламиз, ҳамда ҳар бир қадамда самолёт ё баландлигини ( $\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$  бирликка), ёки тезлигини ( $\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$  бирликка) оширади, деб қабул қиламиз.  $S$  нуқтани  $S_0$  ҳолатдан  $S_k$  ҳолатга турли йўллار билан ўтказиш мумкин (3-шакл). Бу йўллار ичида энг кам ёқилғи миқдорига мос келувчисини танлаш керак.



15.3. – шакл.

Масалани ечиш жараёнини қуйидаги мисолда кўрсатамиз:

**Мисол.** Масаладаги аниқ маълумотлар қуйидаги 4-шаклда тасвирланган. Самолётнинг  $H_k$  баландликка кўтарилиши ва тезлигини  $V_k$  гача оширишда сарф қилинадиган ёқилғи миқдорини минималлаштирувчи йўлни аниқланг.



#### 15.4. -шакл.

Ушбу шаклдаги вертикал чизиқлардаги сонлар самолёт баландлигини оширгандаги, горизонтал чизиқлардаги сонлар эса у тезлигини оширгандаги сарф қиладиган ёқилғи миқдорини кўрсатади.

Масалани ечиш жараёнини  $n_1 + n_2 = 4 + 6 = 10$  қадамларга бўламиз.

Оптималлаштириш жараёнини энг охирги қадамдан бошлаймиз. Бунда  $S_k$  ни ўз ичига олувчи ўнг томондаги энг юқори тўртбурчакка қараймиз. Шаклдан кўринадик,  $S_k$  нуқтага  $A_1$  ва  $A_2$  нуқталардан ўтиш мумкин. Агар  $A_1$  дан  $S_k$  га ўтилса (тезлик оширилса), у ҳолда 8 бирлик ёқилғи сарф қилинади. Агар  $A_2$  нуқтадан  $S_k$  га ўтилса (баландлик оширилса), у ҳолда 11 бирлик ёқилғи сарф қилинади. Ушбу рақамларни  $A_1$  ва  $A_2$  нуқталар қошидаги айланачаларга ёзамиз. Бу қадамда энг кам ёқилғи сарфига мос келувчи  $A_1 \rightarrow S_k$  йўналиш шартли оптимал ечим деб қабул қилинади ва стрелка билан белгиланади.

9 қадамда  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  нуқталардан  $S_k$  нуқтага энг кам ёқилғи сарф қилиб ўтиш йўлини аниқлаймиз. Агар  $B_1$  нуқтадан  $S_k$  га  $B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$  йўналиши орқали ўтиб 17 бирлик ёқилғи сарф қилиш мумкин.  $B_2$  нуқтадан  $S_k$  га иккита йўл билан ўтиш мумкин:

$$I. B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

$$II. B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$$

Бунда I йўлда 18 бирлик, II йўлда эса 24 бирлик ёқилғи сарф қилинади.  $B_3$  нуқтадан  $S_k$  га ягона  $B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$  йўл билан ўтиш ва 22 бирлик  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  нуқталар қошидаги айланачаларга улардан  $S_k$  нуқтагача сарф қилинадиган харажатлардан энг ками ёзилади. Энг кам харажат билан боғлиқ бўлган  $B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$  йўналиш шартли оптимал йўналиши сифатида стрелка билан белгиланади.

8- қадамда  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  нуқталардан  $S_k$  нуқтагача энг кам харажат сарф қилиб ўтиладиган йўл қидирилади. Бунда  $C_1$  нуқтадан  $S_k$  га ягона

$$C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

йўналиш орқали ўтиб, 27 бирлик ёқилғи сарфлаш мумкин.

$C_2$  нуқтадан  $B_1$  ва  $B_2$  нуқталар орқали  $S_k$  нуқтага ўтилганда тенг миқдордаги (25 бирлик) ёқилғи сарф қилинади.

$C_3$  нуқтадан  $S_k$  га иккитагача 2 та ўтиш мумкин:

$$I. C_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

$$II. C_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$$

Бунда I йўл билан ўтилганда 28 бирлик ва II йўл билан ўтилганда эса 24 бирлик ёқилғи сарф қилинади.

$C_4$  нуқтадан  $S_k$  нуқтага ягона

$$C_4 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$$

йўл билан ўтилади ва 34 бирлик ёқилғи сарф қилинади.

Бу босқичда шартли оптимал бошқариш энг кам ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган  $C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$  ва  $C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$  йўналишлардан иборат бўлади. Бу йўналишлар стрелка билан кўрсатилади.

Шундай йўл билан давом этиб, 7 қадамда 34 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган 3 та шартли оптимал йўналиш аниқланади:

$$a) D_2 \rightarrow C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

$$b) D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

в)  $D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

6- қадамда 42 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган 2 та шартли оптимал йўналишлар аниқланади:

а)  $E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

б)  $E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

5- қадамда 51 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган шартли оптимал йўналишлар қуйидагилар бўлади:

I.  $F_3 \rightarrow E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

II.  $F_3 \rightarrow E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

III.  $F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

IV.  $F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

4- қадамда 58 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган шартли оптимал йўналиш топилади:

$L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_4 \rightarrow C_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

3- қадамда 67 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

$M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

2- қадамда 76 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

$H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

Ва ниҳоят 1- қадамда 88 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$S_0 \rightarrow H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

$S_0 \rightarrow H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ ;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

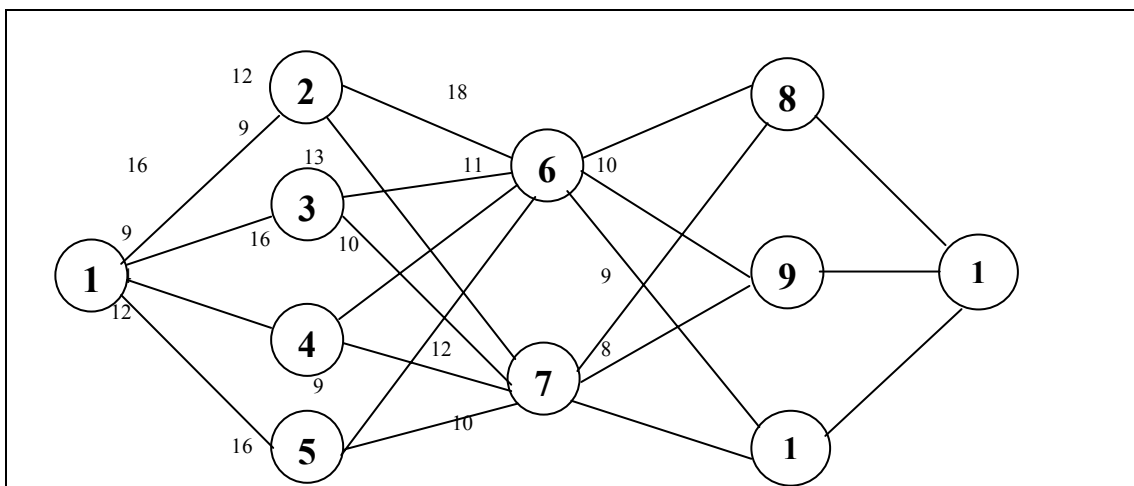
Бу йўналишлар оптимал йўналиш бўлади.

Оптимал ечимга, асосан, самолёт 1- қадамда тезлигини  $V_0 + \Delta V$  даражагача оширади, 2- қадамда у баландлигини  $H_0 + \Delta H$  гача оширади. 3, 4, 5- қадамларда самолётнинг тезлиги мос равишда  $V_0 + 2\Delta V$ ,  $V_0 + 3\Delta V$ ,  $V_0 + 4\Delta V$  га ошиши, 6, 7, 8- қадамларда эса унинг баландлиги мос равишда  $H_0 + 2\Delta H$ ,  $H_0 + 3\Delta H$ ,  $H_0 + 4\Delta H$  даражагача ошиши керак.

9 ва 10 қадамларда самолёт тезлигини мос равишда  $V_0 + 5\Delta V$  ва  $V_0 + 6\Delta V$  даражагача ошиши керак. Натижада у энг кам, яъни 88 бирлик ёқилғи сарф қилади.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

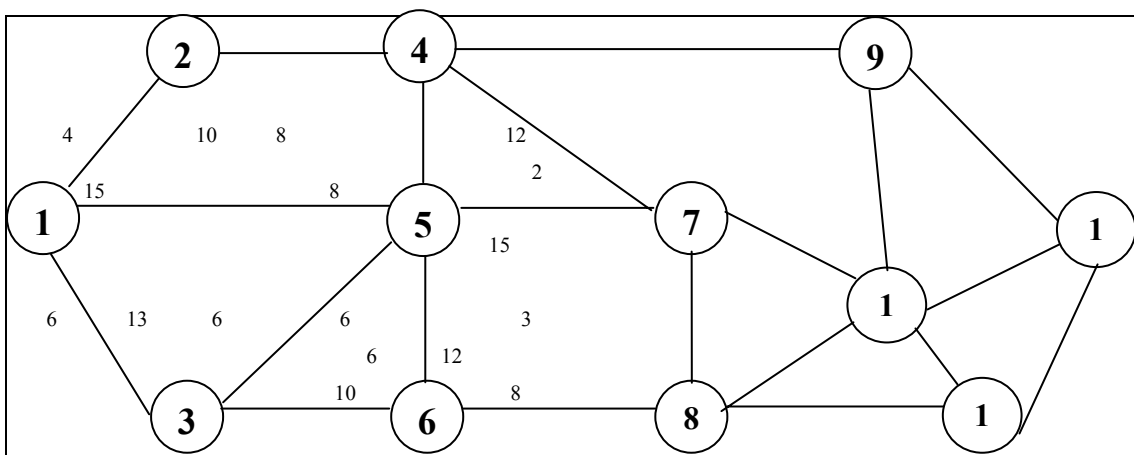
1. ёуйидаги шаклда келтирилган маълумотлар асосида 1-пунктдан 11- пунктгача энг қисқа йўл (йўналиш) ни аниқланг.



15.5. -шакл.

Шаклда ҳар иккита пунктни туташтирувчи кесма устига улар орасидаги масофа ёзилган.

2. ёуйидаги шаклда йўллар тўридаги ҳамма нукталардан 1, 3, 5, 8, 12 нукталаргача энг қисқа масофаларни аниқланг.

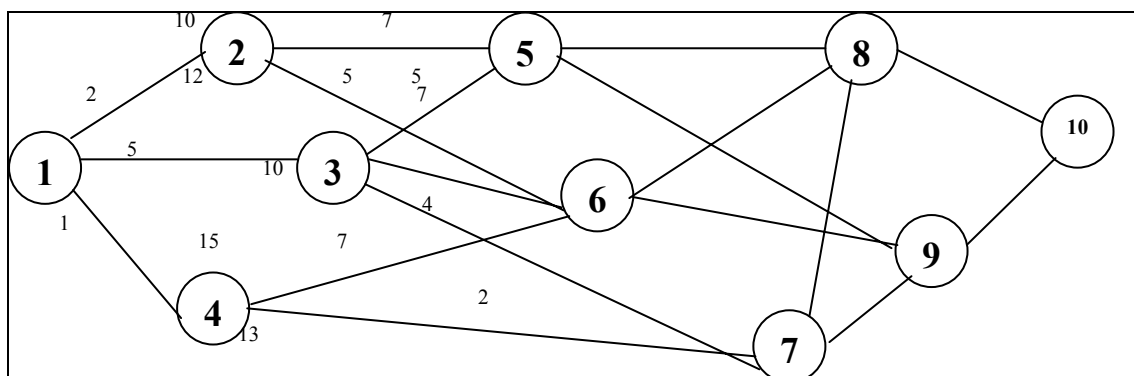


15.6. -шакл.

3. ёуйида А ва В пунктларни туташтирувчи йўллар тўри тасвирланган. А пунктдан В пунктгача бўлган энг қисқа маршрутни аниқланг.



5. ёуйидаги шаклда келтирилган маълумотлар асосида 1-10 пунктлар орасидаги энг қисқа масофани аниқланг.



15.9. -шакл.

6. ёуйидаги шаклда келтирилган маълумотлар асосида самолётнинг учишини оптимал бошқариш масаласини ечинг.

		13	12	10	15	10	8	$S_K$
$H$	14	12	12	15	13	11	10	
	10	8	9	11	13	12		
	15	14	13	12	11	10	9	
	12	13	14	15	14	13		
	11	13	12	14	13	15	10	
	18	19	20	21	18	19		
	10	10	13	11	12	14	11	
	10	10	12	12	13	18		
	9	10	12	15	13	16	19	
$H_0$	$S_0$	13	15	10	14	16	17	
								$V$

15.10. -шакл.

**16- машғулот**  
**Капитал маблағларни оптимал**  
**тақсимлаш масаласи.**

Фараз қилайлик, бирлашмадаги корхоналарни қайта таъмирлаш учун  $X_0$  миқдорда капитал маблағ ажратилган бўлсин. Бу маблағни бирлашмадаги  $N$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) та корхона орасида тақсимлаш керак бўлсин. Агар  $i$ - корхонага  $x_i$  миқдорда капитал маблағ ажратилган бўлса унинг оладиган даромади  $Z_i(x_i)$  бўлади, деб қабул қиламиз.

Бирлашманинг даромади корхоналар даромадлари йиғиндисидан иборат бўлади.

Капитал маблағни оптимал тақсимлаш масаласининг математик модели қуйидагича бўлади:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = X_0 \quad (1)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (2)$$

$$Z = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + \dots + Z_n(x_n) \rightarrow \max \quad (3)$$

Бундай масалани ечиш учун  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ , ...,  $F_n(x)$  функциялар кетма-кетлигини киритамиз. Бу ерда  $F_1(x)$   $x$  ( $0 \leq x \leq X_0$ ) миқдордаги маблағни фақат битта корхонага тақсимлашдан олинадиган максимал даромадни,  $F_2(x)$

$x$  ( $0 \leq x \leq X_0$ ) миқдордаги маблағни 2 та корхонада тақсимлашдан олинадиган максимал даромадни ва ҳоказо,  $F_n(x)$   $x$  ( $0 \leq x \leq X_0$ ) миқдордаги маблағни  $N$  та корхонага тақсимлашдан олинадиган максимал даромадни билдиради.

Маълумки,  $F_N(x_0) = Z_{\max}$  бўлади. Бундан ташқари қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$1) F_1(0) = 0 \quad (4)$$

$$2) F_1(x) = Z_1(x), \quad 0 \leq x \leq X_0. \quad (5)$$

яъни капитал маблағ тақсимланмаса ҳеч қандай фойда олинмайди. Агар  $0 \leq x \leq X_0$  миқдордаги маблағ фақат бир корхонага тақсимланса, у ҳолда бирлашманинг даромади ана шу корхона даромадидан иборат бўлади.

Агар  $0 \leq x \leq X_0$  миқдордаги маблағ  $k$  та корхона орасида тақсимланса, у ҳолда бирлашманинг оладиган максимал даромади қуйидаги функционал тенглама ёрдамида топилади:

$$F_k(x) = \max_{\substack{0 \leq x_k \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_k(x_k) + F_{k-1}(x-x_k)], \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (6)$$

$N$ - босқичда  $F_N(X_0) = \max Z$  топилади. Демак, охириги босқичда мақсад функциянинг максимал қиймати  $F_N(X_0)$  ҳамда  $N$  корхона учун ажратиладиган капитал маблағнинг миқдори, яъни  $X_N^k$  топилади.

Сўнгра ҳисоблаш жараёни тесқари тартибда бажарилади. Бунда охириги қадамдан биринчи қадамгача бир марта қараб чиқилади:

$N$ - корхонага ажратиладиган  $X_N^k$  капитал маблағни билган ҳолда қолган  $N-1$  корхоналар орасида тақсимланадиган  $X_0 - X_N^k$  маблағнинг миқдори топилади. Сўнгра олдин топилган

$$F_{N-1}(x) = \max_{\substack{0 \leq x_{N-1} \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_{N-1}(x_{N-1}) + F_{N-2}(x-x_{N-1})]$$



тенгламадан  $F_{N-1}(X_0-x_N^*)$  ни, ва демак  $x_{N-1}^k$  ни топамиз, ва ҳоказо. Шундай йул билан давом этиб охирида  $x^*_1$  ни топамиз.

Шу билан чегараланган капитал маблағ бирлашманинг  $N$  та корхоналари орасида оптимал тақсимланган бўлади.

1-мисол. Фараз қилайлик, 200 бирлик капитал маблағни бирлашмадаги 4 та корхона орасида тақсимлаш керак бўлсин. <sup>2</sup>ар бир корхона ўзига ажратилган маблағнинг миқдорига боғлиқ равишда турли миқдордаги даромадга эришади. Бу даромадлар қуйидаги 1-жадвалга жойлаштирилган.

1-жадвал

Корхоналарга ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Капитал маблағни корхоналараро оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

Ечиш. Масалани 4 та босқичга бўлиб ечамиз. Дастлаб  $N=1$ , яъни капитал маблағ фақат битта корхонага берилган ҳолни кўрамиз. Бунда

$$F_1(x) = Z_1(x)$$

бўлади.  $0 \leq x \leq 200 = X_0$  ораликдаги ҳар бир  $x_{1k} = k\Delta$  лар учун  $F_1(x_{1k}) = Z_1(x)$  қийматларини 2-жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал

$x_{1k}$	$F_1(x_{1k})$
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

Энди  $N=2$  бўлган ҳолни, яъни  $X_0=200$  бирлик капитал маблағни 2 та корхонага тақсимланган ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда олинадиган даромад

$$F_2(x) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_2(x_2) + F_1(x-x_2)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функциянинг қийматлари қуйидагича топилади.

$0 \leq x \leq 200 = X_0$  ораликдаги ҳар бир  $x$  учун  $0 \leq x_2 \leq x_0$  топилади ва унга тегишли бўлган

$$Z_2(x_2) + F_1(x-x_2)$$

ҳисобланади. Сўнгра

$$F_2(x) = \max_x [Z_2(x_2) + F_1(x-x_2)]$$

топилади.

Масалан,

$x=0$  да  $x_2=0$  бўлади;  
 $x=40$  да  $x_2=0$ ; 40 бўлади;

$x_2=0$ ,  $Z_2(0)+F_1(40)=15$   
 $x_2=40$ ,  $Z_2(40)+F_1(0)=14+0$   $F_2(x=40)=15$

$x=80$  да  $x_2 = 0; 40; 80$   
 $x_2=0$ ,  $Z_2(0)+F_1(80)=0+28$   
 $x_2=40$ ,  $Z_2(40)+F_1(40)=14+15$   $F_2(x=80)=30$   
 $x_2=80$ ,  $Z_2(80)+F_1(0)=30+0$

ва ҳоказо, шундай йул билан  $X=120, 160$  ва  $200$  бўлган ҳоллар учун  $F_2(x=120)$ ,  $F_2(x=160)$ ,  $F_2(x=200)$ ларни топамиз.  $F_2(x)$  функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 3-жадвалда кўрсатамиз.

3-жадвал

$x \ x_2$	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	$X_2^*$
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3- босқичда  $N=3$  бўлган ҳолни, яъни  $X_0=200$  капитал маблағ 3 та корхона ўртасида бўлинган ҳолни кўраамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромадни ҳар бир  $0 \leq x_3 \leq X$ ,  $0 \leq x \leq X_0=200$  учун қуйидаги функционал тенглама орқали ҳисоблаш керак

$$F_3(x) = \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq x \\ 0 \leq x \leq 200}} [Z_3(x_3) + F_2(x-x_3)]$$

Бу функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 4-жадвалда кўрсатамиз.

4-жадвал

$x \ x_3$	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	$X_3^*$
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4- босқичда  $N=4$  бўлган ҳолни, яъни  $X_0=200$  капитал маблағ 4 та корхонага бўлинган ҳолни кўраамиз. Бу ҳолда эришилган даромад

$$F_4(x) = \max_{\substack{0 \leq x_4 \leq x \\ 0 \leq x \leq 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x-x_4)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функцияни ҳисоблаш жараёни 5-жадвалда кўрсатилган.

5-жадвал

x \ x <sub>4</sub>	0	40	80	120	160	200	F <sub>4</sub> (x)	X <sub>4</sub> *
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 жадваллардаги  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_4(x)$  ларни ва уларга мос равишда  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  ва  $x_4^*$  векторларни куйидаги 6-жадвалга жойлаштирамиз.

x \ x <sub>i</sub> *	x <sub>1</sub> *	F <sub>1</sub> (x)	x <sub>2</sub> *	F <sub>2</sub> (x)	x <sub>3</sub> *	F <sub>3</sub> (x)	x <sub>4</sub> *	F <sub>4</sub> (x)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Бу жадвалдан капитал маблағни оптимал тақсимлаш режасини топамиз. 200 бирлик маблағни 4 та корхонага тақсимлаш натижасида бирлашма

$$\max_{i=1,4} F_i(x=200) = \max(90, 90, 93, 95) = 95$$

бирлик даромад олади. Бунда тўртинчи корхонага 80 бирлик маблағ берилади ва ортиб қолган 120 бирлик маблағ қолган 3 та корхонага тақсимланади. Бундан бирлашма

$$\max_{i=1,3} F_i(x=220) = \max(60, 60, 60) = 60$$

бирлик даромад олади. Бунда учинчи корхонага маблағ берилмайди ( $X_3^* = 0$ ). Демак 120 бирлик маблағ биринчи ва иккинчи корхоналарга тақсимланади. Лекин иккинчи корхонага ҳам маблағ берилмайди ( $X_2^* = 0$ ). Шундай қилиб, қолган 120 бирлик маблағ биринчи корхонага берилади. Бундан бирлашма 60 бирлик даромад олади

$$x_1 = 120, \quad F_1(x) = 60$$

Шундай қилиб, капитал маблағлар тақсимлашнинг оптимал режасини топдик:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (120; 0; 0; 80)$$

Бу режага мос келувчи умумий даромадни ташкил қилади.

### Мустақил ечиш учун масалалар

1. 5000 шартли бирликдаги инвестицияни 3 та корхонага шундай тақсимлаш керакки, натижада олинадиган умумий даромад максимал бўлсин. 2-ар бир корхонанинг ўзига ажратилган маблағ миқдорига боғлиқ равишда оладиган даромади куйидаги жадвалда келтирилган.

Корхоналарга ажратиладиган инвестициялар миқдори	Корхоналар даромади		
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$
1000	1500	2000	1700
2000	2000	2100	2400
3000	2500	2300	2700
4000	3000	3500	3200
5000	3600	4000	3500

Жавоб:  $X^*(2000;1000;2000)$ ,  $Z^1_{\max}=6400$

2.  $S=100$  минг сўм инвестицияни 4 та корхона орасида шундай тақсимлаш керакки, натижада олинган умумий даромад максимал бўлсин. 2-ар бир корхонанинг ажратилган маблағ миқдорига боғлиқ равишда оладиган даромадлари куйидаги жадвалда келтирилган:

Инвестиция ҳажми ( $x_i$ ) минг сўм	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Жавоб:  $x_1^*=0$ ,  $x_2^*=20$ ,  $x_3^*=40$ ,  $x_4^*=40$

3. Масаланинг дастлабки шартлари куйидаги жадвалда келтирилган. 100 млн.сўм пулни 4 та корхона орасида шундай тақсимлаш керакки, олинган умумий даромад максимал бўлсин.

Инвестиция ҳажми (млн. сўм)	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Жавоб :  $X^*=(0;20;40;40)$ ,  $Z_{\max}=85$

4. 120 млн. сўм инвестицияни 4 та корхонага шундай тақсимлаш керакки, натижада олинган умумий даромад максимал бўлсин. Инвестиция ҳажмига боғлиқ равишда корхоналарнинг оладиган даромадлари куйидаги жадвалга келтирилган.

Инвестиция ҳажми (млн. сум)	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

Жавоб:  $X^* = (0; 40; 40; 40)$ ,  $Z_{\max} = 97$ .

## 17- машғулот

**Матрицали ўйинлар. Ўйиннинг қуйи ва юқори баҳолари. Матрицали ўйиннинг ечими.**

**Матрицали ўйинни чизиқли программалаш усули билан ечиш.**

²ар қандай  $a$  – суммали жуфт ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг қаторлари I ўйновчининг мумкин бўлган  $A_1, A_2, \dots, A_m$  юришларини устунлари эса II ўйновчининг мумкин бўлган  $B_1, B_2, \dots, B_n$  юришларига мос келади.  $A=(a_{ij})$  матрица тўловлар матрицаси ёки ютуқ матрицаси деб аталади. Матрицанинг ҳар бир  $a_{ij}$  элементи I ўйновчи  $A_i$  юришни танлаб, II ўйновчи  $B_j$  юришни танлагандаги I ўйновчининг ютуғини (II ўйновчининг ютқазувини) англатади.

Ўйиннинг мақсади I ўйновчини максимал ютуққа ва II ўйновчини минимал ютқазувга эришишларини таъминловчи энг маъқул стратегияни танлашдан иборат.

Агар I ўйновчи бирор  $A_i$  стратегияни танласа у ҳеч бўлмаганда

$$a_i = \min_j a_{ij}$$

ютуққа эришади. Буни ҳисобга олиб бу ўйновчи ўзининг энг кам ютуқларини максималлаштирувчи, яъни

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \quad (1)$$

тенгликни таъминловчи юришни танлайди.

Бу ерда  $\alpha$  катталиқ I ўйновчининг гарантияланган ютуғидан иборат бўлади ва ўйиннинг қуйи баҳоси деб аталади. Бу баҳони таъминловчи  $i_0$  стратегия махмин деб аталади.

II ўйновчи, ўз навбатида, ўзининг энг катта мумкин бўлган ютқазувларини минималлаштирувчи, яъни

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \quad (2)$$

тенгликни таъминловчи юришни танлайди  $\beta$  катталиқ ўйиннинг юқори баҳосига деб аталади: бу баҳони таъминловчи  $j_0$  стратегия минимак дейилади.

Агар  $\alpha = \beta$  бўлса, яъни

$$V = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда  $V$  ўйиннинг баҳоси деб аталади. Бу шартни қаноатлантирувчи  $A$  матрицанинг  $a_{i_0j_0}$  элементи

ўйиннинг эгар нуқтаси деб аталади.

Демак матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, унинг ечимини махсмин ва минимакх усуллари билан топилади.

1-мисол. Берилган матрицали ўйин учун қуйи ва юқори баҳоларни ҳамда ўйиннинг оптимал баҳосини топинг.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрицанинг каторларидаги энг кичик элементлар куйидагидан иборат:

$$\min_j (3, 1, 2) = 1,$$

$$\min_j (2, 4, -1) = -1$$

$$\min_j (5, 7, 6) = 5$$

Демак ўйиннинг куйи баҳоси

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}) = \max_i (1, -1, 5) = 5$$

бўлади. Энди ҳар бир устундаги энг катта элементларни топамиз.

$$\max_i (3, 2, 5) = 5$$

$$\max_i (1, 4, 5) = 5$$

$$\max_i (2, -1, 6) = 6$$

У ҳолда ўйиннинг юқори баҳоси куйидагига тенг бўлади.

$$\beta = \min_j \left( \max_i a_{ij} \right) = \min_j (5, 7, 6) = 5$$

Ушбу ўйиндаги куйи ва юқори баҳолар ўзаро тенг. Демак, ўйиннинг оптимал баҳоси

$$V = \alpha = \beta = 5 \text{ бўлади.}$$

Ушбу баҳони (ечимни) таъминловчи  $a_{31}$  элемент ўйиннинг эгар нуқтаси ва  $A_3$  ва  $B_1$  стратегиялар оптимал стратегия бўлади.

Агар ютуқлар матрицаси эгар нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда махмин ва минимак усуллар билан ўйиннинг ечимини топиб бўлмайди. Бу ҳолда ўйиннинг ечимини топишда аралаш стратегиялардан топилади.

I ўйновчининг аралаш стратегияси деб компонентлари куйидаги

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (4)$$

шартларни қаноатлантирувчи  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  векторга айтилади. Бунда ҳар бир  $x_i$  I ўйновчининг  $A_i$  юришни танлаш эҳтимолини билдиради.

II ўйновчининг аралаш стратегияси деб компонентлари куйидаги

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (5)$$

шартларни қаноатлантирувчи  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  векторга айтилади. Бунда ҳар бир  $y_j$  II ўйновчининг  $B_j$  юришни танлаш эҳтимолини билдиради.

Аралаш стратегиялар усулида I ўйновчи  $A_i$  юришни танлаб, II ўйновчи  $B_j$  юришни танлагандаги I ўйновчининг ютуғи сифатида унинг ютишининг математик кутилиши олинади, яъни у куйидагига тенг бўлади

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (6)$$

Агар I ўйновчи ўзининг  $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m)$  оптимал стратегиясни қўлласа, у ҳолда II ўйновчи қандай стратегияни танлашидан қатъий назар, унинг ютуғи ўйиннинг баҳоси  $V$  дан кам бўлмайди, яъни







$$\left. \begin{aligned} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 &\geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 &\geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 &\geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V} \quad (25)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \quad (26)$$

Бу системани қуйидаги чизикли программалаш масаласи кўринишида ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 &\geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 &\geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 &\geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \quad (28)$$

$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \min \quad (29)$$

II ўйновчи учун берилган матрицали ўйин қуйидаги чизикли программалаш масаласига айланади.

$$\left. \begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 &\leq 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 &\leq 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \quad (31)$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \max \quad (32)$$

(27)-(29) ва (30)-(32) масалалар ўзаро иккиланган масалалардир. Шунинг учун улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккинчисининг ечимини осонликча топиш мумкин.

Биз (30) - (32) масалани симплекс усули билан ечамиз. Бунинг учун уни нормал холга келтириб, симплекс жадвалга жойлаштирамиз:

$$\left. \begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 &= 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 + u_5 &= 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 + u_6 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$u_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6})$$

$$F_{\min} = -u_1 - u_2 - u_3$$

Б.В	С.б	P <sub>0</sub>	-1	-1	-1	0	0	0
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>
P <sub>4</sub>	0	1	5	3	2	1	0	0
P <sub>5</sub>	0	1	3	5	5	0	1	0
P <sub>6</sub>	0	1	6	3	4	0	0	1
$\Delta_j$		0	1	1	1	0	0	0
P <sub>4</sub>	0	1/6	0	1/2	-4/3	1	0	-5/6
P <sub>5</sub>	0	1/2	0	7/2	3	0	1	-1/2
P <sub>1</sub>	-1	1/6	1	1/2	2/3	0	0	1/6
$\Delta_j$		-1/6	0	1/2	1/3	0	0	-1/6
P <sub>4</sub>	0	2/21	0	0	-25/21	1	-1/7	-16/21
P <sub>2</sub>	-1	1/7	0	1	6/7	0	2/7	-1/7
P <sub>1</sub>	-1	2/21	1	0	5/21	0	-1/7	5/21
$\Delta_j$		-5/21	0	0	-2/21	0	-1/7	-2/21

Оптимальное решение :

$$U = \left( \frac{2}{21}; \frac{1}{7}; 0 \right)$$

$$F_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{5}{21}$$

$$V = \frac{21}{5}$$

$$y_1 = V \cdot U_1 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$y_2 = V \cdot U_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = V \cdot U_3 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$Y = \left( \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0 \right)$$

Эндиге I-үйрөкчү үчүн оптимальное аралаш стратегияни топуамиз. Бунинг үчүн (30) - (32) масалага иккиланган масала ечимини топуамиз:

$$T = (t_1; t_2; t_3) = \left( 0; \frac{1}{7}; \frac{2}{21} \right)$$

хамда куйидаги муносабатлар асосида  $X=(x_1, x_2, x_3)$  аралаш стратегия топуамиз:

$$x_1 = V \cdot t_1 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = V \cdot t_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$x_3 = V \cdot t_3 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$X^* = \left( 0 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \right)$$

$$\text{Жавоб: } X^* = \left( 0; \frac{3}{5}; \frac{2}{5} \right) \quad Y^* = \left( \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0 \right)$$

$$V = \frac{21}{5}$$

### Мустақил ечиш учун масалалар

I. ёуйидаги матрицали ўйинларни минимак ва махмин усуллари билан ечинг.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X = (0; 0; 1), \quad Y = (0; 1; 0), \quad V = 5$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X = (0; 1; 0; 0), \quad Y = (0; 1; 0; 0), \quad V = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ жавоб. } X = (1; 0; 0), \quad Y = (0; 1; 0)$$

$$\text{ёки } X = (0; 2; 0), \quad Y = (0; 1; 0) \quad V = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ жавоб. } X = (1; 0; 0), \quad Y = (1; 0; 0)$$

$$\text{ёки } X = (0; 0; 1), \quad Y = (1; 0; 0) \quad V = 3$$

II. Ёуйидаги матрицали ўйинларни чизикли программалаш усуллари билан ечин:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X^* = \left(0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right); \quad Y^* = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0\right) \quad V = \frac{5}{2}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X^* = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right); \quad Y^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 0\right) \quad V = \frac{7}{4}$$

3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \quad Y^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \quad V = 0$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X^* = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right) \quad Y^* = \left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}; 0\right) \quad V = \frac{4}{7}$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right) \quad Y^* = \left(\frac{1}{5}; 0; \frac{4}{5}\right) \quad V = \frac{23}{5}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{жавоб. } X^* = \left(0; \frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right) \quad Y^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad V = 7$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

жавоб.  $X^* = (0; 0; 1) \quad Y^* = (0; 1; 0) \quad V = 7$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

жавоб.  $X^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \quad Y^* = \left(\frac{3}{4}; 0; 0; \frac{1}{4}\right) \quad V = \frac{13}{4}$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

жавоб.  $X^* = \left(\frac{2}{5}; 0; \frac{3}{5}\right) \quad Y^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}; 0\right) \quad V = \frac{17}{5}$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

жавоб.  $X^* = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{2}{5}; 0\right) \quad Y^* = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{2}{5}; 0\right) \quad V = 3$

## 18- машғулот Табиатга қарши ўйин.

“Табиат”га қарши ўйинда “табиат” ва ечим қабул қилувчи шахс (ЕёёШ) қатнашади. Табиатнинг  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ҳоллари мавжуд бўлиб, уларга қарши ЕёёШнинг  $m$ -та  $A_1, A_2, \dots, A_m$  тадбирлари мавжуд. Табиатга қарши ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$T_j$ $A_i$	$T_1$	$T_2$	...	$T_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

Бу ерда  $a_{ij}$  - табиатнинг  $T_j$  ҳолатига қарши ЕёёШнинг  $A_i$  чора тадбирини амалга оширгандаги кўрадиган фойдаси ёки зарарини ифодалайди. Агар  $a_{ij}$  - фойда (ютук) бўлса, у ҳолда бу матрица «ютуклар матрицаси» дейилади. Агар  $a_{ij}$  - ютказув (зарар)ни ифодаси бўлса. Ушбу матрица «тўловлар матрицаси» деб аталади. «Ютуклар матрицаси» асосида ЕёёШ ўзининг фойдасини максималлаштирувчи йўлни (соф стратегияни) танлайди. «Тўловлар матрицаси» асосида эса у ўзининг зарарини минималлаштирувчи йўлни танлайди. Бундай соф стратегияларни танлаш учун Лаплас, Байес, Вальд Сэвидж ва Гурвиц мезонларидан фойдаланилади.

1. **Лаплас мезонида** табиатнинг барча ҳолатлари тенг эҳтимолли деб ҳисобланади, яъни  
 $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 1/n$

деб қабул қилинади. У ҳолда ЕёёШ  $A_i$  қўллагандаги ютуғи қуйидагига тенг бўлади:

$$Q_i = \frac{1}{n} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}) \quad (i=1, m) \quad \text{---} \quad (1)$$

ЕёёШ максимал фойда (минимал зарар) берувчини танлайди.

2. **Байес мезонида** табиатнинг ҳар бир  $T_j$  ҳолати маълум  $P_j$  эҳтимол билан рўй бериши аниқланган бўлади. У ҳолда ЕёёШнинг  $A_i$  йўлини (стратегияни) танлангандаги ютуғи қуйидагига тенг бўлади:

$$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n \quad (i=1, m) \quad \text{---} \quad (2)$$

ЕёёШ  $\max Q_i$  ( $\min Q_i$ ) берувчи йўлни танлайди.

3. **Вальд мезони** максимин – минимакс усулидан иборат. Бунда ЕёёШ

$$\max (\min a_{ij}) \quad [\min (\max a_{ij})] \quad (3)$$

таъминловчи йўлни танланади

4. **Сэвидж мезони** ҳам минимакс – максимин принципига асосланган бўлиб, унда  $(a_{ij})$  – ютуқлар (тўловлар) матрицаси ўрнига «таваккалчилик матрицаси» деб аталувчи  $(r_{ij})$  матрица ишлатилади. Бу матрицани элементлари қуйидагича топилади:

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij} = \beta - a_{ij}, \text{ агар } a_{ij} \text{ – ютуқ бўлса,} \quad (4)$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \min a_{ij} = a_{ij} - \beta, \text{ агар } a_{ij} \text{ – ютқазув бўлса,} \quad (5)$$

5. **Гурвиц мезони** ясама мезондан иборат бўлиб, унга асосан оптимал стратегия сифатида қуйидаги шартни қаноатлантирувчи стратегия танланади.

$a_{ij}$  – даромадни билдирганда:

$$\gamma = \max \left[ \alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij} \right], \alpha \in [0,1] \quad (6) \text{ коида}$$

$a_{ij}$  – ютуқни (зарарни) билдирганда:

$$\gamma = \min_i \left[ \alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right], \alpha \in [0,1] \quad (7)$$

Бу ерда  $\alpha$  ечим қабул қилиш жараёнини субъектив баҳоловчи параметр. Агар  $X=1$  бўлса вазият оғир бўлган бўлади ва уни тўғрилаш учун чора-тадбирларни қўллаш керак бўлади.  $X=0$  бўлганда вазият жуда яхши ва унга ҳеч қандай чора тадбирлар қўллаш зарур бўлмайди.

**1- мисол.** ёуйидаги ютуқлар матрица кўринишида берилган табиатга қарши ўйинни Лаплас, Вальд, Сэвидж мезонлари ёрдамида ечинг.

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$A_1$	1	5	8	18
$A_2$	10	6	4	12
$A_3$	2	1	3	16
$A_4$	5	13	5	1

Ечиш: Лаплас мезони бўйича ўйинни ечиш учун табиатнинг  $T_1, T_2, T_3, T_4$  ҳолатлари тенг эҳтимол билан рўй беради, яъни  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/4$  деб қабул қилиб қуйидаги жадвални тузамиз:



$T_j$ $A_i$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$Q_i = (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in})P_i$
$A_1$	1	5	8	13	$\frac{1}{4} (1+5+8+13)=27/4$
$A_2$	10	6	4	12	$\frac{1}{4} (10+6+4+12)=8$
$A_3$	2	1	3	16	$\frac{1}{4} (2+1+3+16)=22/4$
$A_4$	5	13	5	1	$\frac{1}{4} (5+13+5+1)=6$
$P_i$	1/4	1/4	1/4	1/4	$\max Q_i = 8$

Демак, бу усулда ЕёёШ энг катта (8) ютукни таъминловчи  $A_2$  соф стратегияни танлайди.

Вальд мезони буйича ўйинни ечиш жараёнини қуйидаги жадвалда тасвирлаймиз:

$T_j$ $A_i$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\min a_{ij}$
$A_1$	1	5	8	18	1
$A_2$	10	6	4	12	4
$A_3$	2	1	3	16	1
$A_4$	5	13	5	1	1
					$\max_i (\min_j a_{ij}) = 4$

Бу мезон буйича ҳам энг катта ютукни таъминловчи стратегия  $A_2$  экан.

Севидж мезонини қўллаб ўйинни ечишдан аввал таваккалчилик матрицасини тузамиз. Унинг элементларини (4) формула ёрдамида топамиз:

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\max_j (r_{ij})$
$A_1$	9	8	0	0	9
$A_2$	0	7	4	6	7
$A_3$	8	12	5	2	12
$A_4$	5	0	3	17	17
					$\min_i (\max_j r_{ij}) = 7$

Демак, таваккалчиликдан кўрадиган зарарни минималлаштирувчи энг яхши стратегия  $A_2$  дан иборат экан.

Ушбу ўйин Байес мезони асосида ечиш учун табиатнинг  $T_1$  ҳолати 0,2 эҳтимол билан  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ , ҳолатлари эса мос равишда 0,3; 0,4; 0,1 эҳтимоллар билан рўй беради деб фарз қиламиз. У ҳолда ўйинни ечиш қуйидаги жадвалда кўрсатилганидек топилади:

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n$
$A_1$	1	5	8	18	6,7
$A_2$	10	6	4	12	6,6
$A_3$	2	1	3	16	3,5
$A_4$	5	13	5	1	7
$P_j$	0,2	0,3	0,4	0,1	$\max Q_i = 7$

Демак, Байес мезони асосида энг оптимал стратегия  $A_4$  экан.

Гурвиц мезонини қўллаш учун ечим қабул қилиш жараёни ўртача, яъни  $X=0,5$  деб қабул қиламиз ва ҳисоблаш жараёнини қуйидаги кўринишдаги жадвалда бажарамиз:

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	$\gamma$
$A_1$	1	5	8	18	1	18	9,5
$A_2$	10	6	4	12	4	12	8
$A_3$	2	1	3	16	1	16	8,5
$A_4$	5	13	5	1	1	13	7
							$\max_i \gamma = 9,5$

Ушбу мезон бўйича оптимал стратегия энг катта кўрсаткични берувчи  $A_1$  стратегия эканлиги аниқланади.

### Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Савдо корхонасида 500 бирлик мавсумий маҳсулот сотилмай қолган бўлсин. Бу маҳсулотнинг олдинги нархи 20 бирликни ташкил этган бўлсин. Энди савдо корхонаси олдида маҳсулотнинг нархини тушириш масаласи турибди. Маҳсулот нархини неча фоизга туширганда корхонанинг кўрадиган зарари минимал бўлади?

Савдо корхонаси маҳсулот нархини 20% ( $A_1$  йўл), 30% ( $A_2$  йўл), 40% ( $A_3$  йўл), 50% ( $A_4$  йўл) тушириш мўлжаллайди. Бу йўллари ЕёёШнинг стратегиялари деб қараймиз. «Табиат»нинг иккита йўли бор: 1) Табиатнинг кам эгилувчанлиги ( $T_1$  йўл); 2) Табиатнинг кўп эгилувчанлиги ( $T_2$  йўл). Ана шуларни назарга олиб тўловлар матрицаси тузилсин ва ўйиннинг ечимини турлича мезонлар асосида топилсин.

2. ёуйидаги жадвалда берилган маълумотлар асосида ютуқларни максималлаштирувчи стратегияни Байес мезони асосида топинг:

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$A_1$	15	17	20
$A_2$	25	27	23

$P_i$	0,2	0,7	0,1
-------	-----	-----	-----

Жавоб:  $A_2$  ; 26,2

3. ёйидаги ютуқлар матрицаси ёрдамида берилган ўйинни  
 а) табиатнинг турли ҳолатлари номаълум бўлган;  
 б) табиатнинг турли ҳолатларининг рўй бериши эҳтимоллари  $P_1=0,5$ ,  $P_2=0,3$  ва  $P_3=0,2$  бўлган ҳоллар учун ечинг.

$T_j$ $A_i$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$A_1$	7	5	6
$A_2$	9	2	8
$A_3$	3	5	4
$P_i$	0,5	0,3	0,2

Жавоб: а)  $A_2$ ;  $6\frac{1}{3}$

б)  $A_2$ ; 6,7

4. Фабрика уч хил  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  маҳсулотлар ишлаб чиқаради. Корхонанинг даромади ишлаб чиқарилган маҳсулотга бўлган талабга боғлиқ равишда қуйидаги ютуқлар матрицаси кўринишида берилган.

$T_j$ $A_i$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$A_1$	6	8	4
$A_2$	5	7	9
$A_3$	8	3	2

Энг катта даромад келтирувчи маҳсулот ишлаб чиқариш режасини топинг.

Жавоб:  $A_2$  маҳсулот ишлаб чиқарса, корхона даромади 7 бирлик бўлади.

5. “”Табиат” билан ўйин қуйидаги тўловлар матрицаси орқали берилган:

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$A_1$	71	24	23
$A_2$	24	75	23
$A_3$	70	16	20
$A_4$	16	27	13

Вальд, Сэвидж ва Гурвиц мезонлари ( $\alpha=0,6$  бўлган ҳолда) билан ўйиннинг ечимини топинг.

6. Мамлакатда 4 хил электростанциялар қурилиши мўлжалланган табиатнинг турли ҳолларида электростанцияларни қуриш самарадорлиги қуйидаги ютуқлар матрицаси кўринишида берилган:

а)

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$A_1$	1	4	5	9
$A_2$	3	8	4	3
$A_3$	4	6	6	2

б)

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$A_1$	20	30	15
$A_2$	75	20	35
$A_3$	25	80	25

$A_4$	85	5	45
-------	----	---	----

B)

$A_i \backslash T_j$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$A_1$	0	4	-1	3
$A_2$	1	0	2	2
$A_3$	3	1	-2	-1