O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

«МАТЕМАТИКА» КАФЕДРАСИ

«OLIY MATEMATIKA» FANIDAN

Amaliy mashg‘ulot

TUZUVCHILAR: Dots.Muminova R., katta o‘qit. Turdaxunova S.

Toshkent- 2010

33. O‘ZGARUVCHILARI AJRALADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Differensial tenglama deb, erkli o‘zgaruvchi *x*, noma‘lum funksiya *y(x)* va uning turli tartibli hosilalari yoki differensiallarini bog‘lovchi tenglamaga aytiladi va $F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ ko‘rinishda yoziladi .

Agar noma’lum funksiya birgina erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Birinchi tartibli differensial tenglama $F(x, y, y')=0$ yoki hosilaga nisbatan yechilgan bo‘lsa $y' = f(x,y)$ ko‘rinishda yoziladi .

Birinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimi deb, bitta ixtiyoriy o‘zgarmas *C* miqdorga bog‘liq bo‘lgan hamda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x,C)$ funksiyaga aytiladi.

a) bu funksiya differensial tenglamani *C* o‘zgarmas miqdorning har qanday aniq qiymatida ham qanoatlantiradi.

b) $x=x_0$ bo‘lganda $y=y_0$ boshlang‘ich shart har qanday bo‘lganda ham *C* miqdorning shunday $C=C_0$ qiymatini topish mumkinki,

$y = \varphi(x,C_0)$ funksiya berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi.

$y = \varphi(x,C_0)$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Biz o‘zgaruvchilari ajratilgan va o‘zgaruvchilari ajraladigan hamda bir jinsli va chiziqli differensial tenglamalarni qaraymiz.

$M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi. Bu tenglama yechimini topish uchun har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallanadi .

I. $M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0$ ko‘rinishdagi tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi. Bu tenglamada oldin o‘zgaruvchilar ajratiladi, so‘ngra integrallanadi.

Mislollar keltiramiz:

33.1. $y' = y\, ctg\, x$, $(0<x<\pi, -\infty<y<\infty)$ differensial tenglamaning $x_0=\frac{\pi}{6}$,

$y_0 = 2$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:

Yechimi: $\frac{dy}{dx} = y\ ctg\ x$, $\frac{dy}{y} = ctg\ x\ dx$, $lny = ln\ sin\ x + ln\ C$;

$y = C\ sin\ x$ umumiy yechim.

$x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = 2$ shartlarni qo‘yamiz, $2 = Csin\ \frac{\pi}{6}$; $C = 4$;

$y = 4\ sinx$ xususiy yechim.

33.2. $x\ dx + y\ dy = 0$ o‘zgartiruvchilari ajralgan tenglamani har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallaymiz

$$\int xdx + \int ydy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C, \quad x^2 + y^2 = C_1^2$$

tenglamaning umumiy yechimi bo‘lib, markazi koordinata boshida yotgan, radiusi C_1 ga teng bo‘lgan aylanalar oilasining tenglamasidir.

33.3. $(1+x)y\ dx + (1-y)\ x\ dy = 0$ bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.

O‘zgaruvchilarni ajratish uchun tenglamaning har bir hadini $xy \neq 0$ ga bo‘lamiz

$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$, integrallaymiz $ln|x| + x + ln\ y - y = ln\ C$,

$ln\left|\frac{xy}{C}\right| = y - x$; $\frac{xy}{C} = e^{y-x}$, $xy = Ce^{y-x}$ bu tenglamaning umumiy integrali.

II $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ ko‘rinishdagi tenglamaga bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

$\frac{y}{x} = u$ almashtirish bilan integrallanadi. $\frac{y}{x} - no'l$ o‘lchovli bir jinsli funksiya.

33.4. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y}{x^3 - y^3}$ tenglama bir jinsli differensial tenglama. Bu tenglamani $y = ux$ almashtirish bajarib, integrallaymiz, $y = ux$ dan $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$;

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{x^2.ux}{x^3-u^3x^3};\qquad x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^3}-u;\qquad x\frac{du}{dx}=\frac{u^4}{1-u^3};$$

o‘zgaruvchilarni ajratamiz

$\frac{dx}{x}=\frac{1-u^3}{u^4}$ *du* integrallaymiz *ln x + ln C =-1/(3u^3)-ln u* ;

ln Cxu = $\frac{-1}{3u^3}$; *ln Cx* $\frac{y}{x}=-\frac{x^3}{3y^3}$; *ln Cy*=-$\frac{x^3}{3y^3}$;

tenglamaning umumiy integrali.

III. Chiziqli differensial tenglamalar

I – tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (1)$$

ko`rinishdagi tenglamaga aytiladi . I-tartibli chiziqli tenglama ikki usulda integrallanadi.

1-usul. (1) tenglama yechimi ikki funksiya ko`paytmasi shaklida qidiriladi

$$y=u(x)\,v(x) \quad (2)$$

u,*v* lardan birini topish ixtiyoriy.

2-usul o`zgarmasni variatsiyalash usuli (1) tenglamaning umumiy yechimini topishda $Q(x)=0$ deb olib, uning umumiy yechimidagi o`zgarmas sonni, *x* ning funksiyasi deb qaraladi va $y'+P(x)y=0$ bir jinsli chiziqli tenglama yechiladi.

Mislollar keltiramiz:

33.5. $\frac{dy}{dx}-2xy=x-x^3$ chiziqli tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$P(x)=-2x;\quad Q(x)=x-x^3.$$

Tenglamaning umumiy yechimini

$$y=u*v \quad (2)$$

ko`rinishda qidiramiz (2) tenglikni differensiallaymiz:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \quad (3);$$

(2), (3) ni berilgan tenglamaga qo`yamiz

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-2x*u*v=x-x^3; \quad u(\frac{dv}{dx}-2xv)+v\frac{du}{dx}=x-x^3 \quad (4)$$

u, *v* lardan birini topish ixtiyoriy bo`lgani uchun *v* ni $\frac{dv}{dx}-2xv=0$ tenglikdan topamiz.

$\frac{dv}{v}=2xdx$, $ln\ |v| = x^2 + lnC$, $v=Ce^{x^2}$ xususiy holda C=1 deb olsak $v=e^{x^2}$

Bularni (4) ga qo`yib, o`zgaruvchilarni ajratib, integrallaymiz:

$$du=(x-x^3)\ e^{-x^2}\ dx$$

$$u=\int\left(x-x^3\right)e^{-x^2}dx=\int xe^{-x^2}dx-\int x^3e^{-x^2}dx$$

Bu integrallarni bo`laklab, integrallaymiz:

$$u=-e^{-x^2}\ (1-\frac{1}{2}x^2)+C$$

$$y=u*v=-e^{-x^2}\cdot e^{x^2}\ (1-\frac{x^2}{2})+C=\frac{x^2}{2}-1+C;$$

33.6. $y'+2xy=x\ e^{-x^2}$,

$Q(x)=x\ e^{-x^2}=0$ deb olib,

$y'+2xy=0$ tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{dy}{dx}=-2xy; \quad \frac{dy}{y}=-2xdx; \quad ln\ |y|=-x^2+lnC,\ y=C\ e^{-x^2}$$

Tenglamaning umumiy echimidagi *C* ni x ning funksiyasi deb qarab, *y* ni *x* bo`yicha integrallaymiz

$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{-x^2}-2Cxe^{-x^2}$ ni berilgan tenglamaga qo`yamiz .

$$\frac{dC}{dx}e^{-x^2}-2Cxe^{-x^2}+2Cxe^{-x^2}=xe^{-x^2}$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-x^2} = xe^{-x^2}\ ;\ dC = x\,dx,\qquad C=\frac{x^2}{2}+C_1,$$

$y=Ce^{-x^2}=(\frac{x^2}{2}+C_1)e^{-x^2}$ tenglamaning umumiy yechimi hosil bo`ladi

Mustaqil yechish uchun mashqlar

Quyidagi differensial tenglamalarni integrallang va boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni toping:

33.7. $xy\,dx+(x+1)dy=0$; 33.8. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$;

33.9. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$ $y(0)=1$ 33.10. $y'ctgx+y=2$ $y(0)=-1$

33.11. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $x=2$ ga $y=0$ 33.12. $2x^2y\,y'+y^2=2$

Quyidagi bir jinsli tenglamalarni yeching:

33.13. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$ 33.14. $x\frac{dy}{dx}+y=0$

33.15. $x\,dy=(x+y)dx$ 33.16. $(x+2y)dx-x\,dy=0$

33.17. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

Tenglamalarni integrallang:

33.18. $y'-y=2x-3$ 33.19. $z'=10^{x+z}$

33.20. $e^{-s}(1+\frac{ds}{dt})=1$ 33.21. $x\frac{dx}{dt}+t=1$

33.22. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$ 33.23. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$;

33.24. $y^2+x^2y'=2xy'y$ 33.25. $(x^2+y^2)y'=2xy$

33.26. $xy'-y=x\,tg\frac{y}{x}$

Quyidagi chiziqli differensial tenglamalarni har ikki usulda yeching

33.27. $xy'-2y=2x^4$ 33.28. $y'+ytgx=\sec x$

33.29. $x^2y'+xy+1=0$ 33.30. $y'=2x(x^2+y)$

33.31. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$ 33.32. $(2x+1)y'=4x+2y$

33.33. $x(y'-y)=e^x$ 33.34. $y+x(y'-x\,Cos\,x)$

33.35. $(xy'-1)lnx=2y$